



LATVIJAS
UNIVERSITĀTE



Mazā
matemātikas
universitāte

Gadījuma klejošana

Kāpēc veiksmē ne vienmēr ir tavā pusē?

MMU 5. nodarbība

Doc., pētniece **Leonora Pahirko**

SPDAL

Matemātikas nodaļa

Eksakto zinātņu un tehnoloģiju fakultāte

21. marts, 2026

- 1 Ievads
- 2 Varbūtību teorija: no azartspēlēm līdz zinātnei
- 3 Ievads gadījumu procesu teorijā
- 4 Gadījuma klejošana pa veselajiem skaitļiem
- 5 Spēlmaņa bankrota problēma
- 6 Sagaidāmais loterijas ieguvums
- 7 Noslēgums un jautājumi pārdomām

Kas ir SPDAL?

SPDAL jeb **Statistisko pētījumu un datu analīzes laboratorija**



EZTF Matemātikas nodaļas pētnieku grupa:

- dibināta 2017. gadā ar mērķi apvienot **varbūtību teorijas, matemātiskās statistikas** un **datu zinātnes** pētniekus
- vadītājs – vadošais pētnieks, profesors **Jānis Valeinis**
- veic akadēmisko darbību (lekciju kursi)
- īsteno pētniecību un sadarbību projektos (publikācijas, maģistra un doktora darbi)
- piedāvā konsultācijas statistikā
- piedalās zinātnes popularizēšanā

Apciemo mūsu mājaslapu: www.spdal.lu.lv !

Ko šodien mēģināsim iemācīties?

- Kāda ir **varbūtību teorijas** saistība ar azartspēlēm?
- Kas ir **gadījuma klejošana**?
- Kāpēc **veiksme ilgtermiņā bieži nav spēlētāja pusē**?
- Kāpēc dažādas **azartspēļu stratēģijas** parasti nedarbojas?
- Kāpēc **loterijas** no matemātiskā viedokļa parasti nav izdevīgas?

Ko šodien mēģināsim iemācīties?

- Kāda ir **varbūtību teorijas** saistība ar azartspēlēm?
- Kas ir **gadījuma klejošana**?
- Kāpēc **veiksme ilgtermiņā bieži nav spēlētāja pusē**?
- Kāpēc dažādas **azartspēļu stratēģijas** parasti nedarbojas?
- Kāpēc **loterijas** no matemātiskā viedokļa parasti nav izdevīgas?

Galvenā doma šodien:

Nejaušība var šķist haotiska, bet tās ilgtermiņa uzvedībai bieži ir skaidra matemātiska struktūra.

Varbūtību teorija: no azartspēlēm līdz zinātnei

Kur radās varbūtību teorija?

Varbūtību teorija neveidojās tikai kā abstrakta matemātika. Tās pirmsākumi ir cieši saistīti ar **azartspēlēm**, **godīgu likmju noteikšanu** un mēģinājumiem saprast, kā darbojas **nejaušība**.

- Jau 16.–17. gadsimtā cilvēki interesējās par kauliņu spēlēm, kāršu spēlēm un likmēm.
- Radās jautājumi: kas ir **godīga spēle**, kā sadalīt laimestu, un vai iespējams izveidot uzvarošu stratēģiju?
- Šie jautājumi kļuva par pamatu jaunai matemātikas nozarei — **varbūtību teorijai**.

Ševaljē de Merē problēma

Vēsturisks stāsts

17. gadsimtā franču aristokrāts un azartspēļu cienītājs **Ševaljē de Merē** pamanīja, ka dažas likmes, kas intuitīvi šķita izdevīgas, praksē nestrādāja tā, kā viņš gaidīja.

Viņu īpaši interesēja divi spēles varianti, kas likās ekvivalenti:

- mest vienu kauliņu 4 reizes un iegūt vismaz vienu sešinieku;
- mest divus kauliņus $4 \cdot 6 = 24$ reizes un iegūt vismaz vienu dubulto sešinieku.

Ševaljē de Merē jautājumi noveda pie sarakstes starp **Blezu Paskālu** un **Pjēru Fermā**, kas tiek uzskatīta par vienu no varbūtību teorijas kā zinātnes attīstības aizsākumiem.

De Merē paradokss: intuīcija pret matemātiku

- Intuitīvi var šķist, ka abas spēles ir līdzīgas, jo varbūtība uzvest "6" ir $\frac{1}{6}$, varbūtība uzvest "6" uz diviem kauliņiem ir $\frac{1}{36}$, tad

$$6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

- Tomēr otrajā spēles variantā spēlmanis aizvien biežāk sāka zaudēt naudu.
- Kāpēc?

De Merē paradokss: intuīcija pret matemātiku

- Intuitīvi var šķist, ka abas spēles ir līdzīgas, jo varbūtība uzvest "6" ir $\frac{1}{6}$, varbūtība uzvest "6" uz diviem kauliņiem ir $\frac{1}{36}$, tad

$$6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

- Tomēr otrajā spēles variantā spēlmanis aizvien biežāk sāka zaudēt naudu.
- Kāpēc?

$$P(\text{vismaz viens } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52$$

De Merē paradokss: intuīcija pret matemātiku

- Intuitīvi var šķist, ka abas spēles ir līdzīgas, jo varbūtība uzvest "6" ir $\frac{1}{6}$, varbūtība uzvest "6" uz diviem kauliņiem ir $\frac{1}{36}$, tad

$$6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

- Tomēr otrajā spēles variantā spēlmanis aizvien biežāk sāka zaudēt naudu.
- Kāpēc?

$$P(\text{vismaz viens } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52$$

$$P(\text{vismaz viens } (6, 6)) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49$$

Tā no jautājumiem par azartspēlēm attīstījās zinātnes nozare - varbūtību teorija.

Ievads gadījumu procesu teorijā

Kas ir gadījuma jeb stohastisks process?

Vārds “*stohastisks*” cēlies no grieķu vārda **stokhastikos**, kas nozīmē “spējīgs minēt” vai “vērst uz mērķi”.

Definīcija

Par **stohastisku** jeb **gadījuma procesu** sauc gadījuma lielumu saimi, kas apraksta kādu laikā mainīgu sistēmu.

Kas ir gadījuma jeb stohastisks process?

Vārds “*stohastisks*” cēlies no grieķu vārda **stokhastikos**, kas nozīmē “spējīgs minēt” vai “vērsts uz mērķi”.

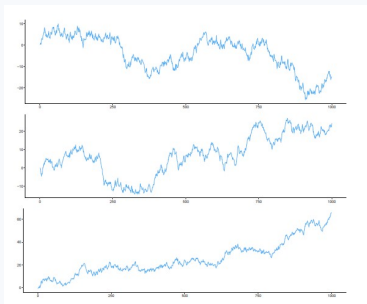
Definīcija

Par **stohastisku** jeb **gadījuma procesu** sauc gadījuma lielumu saimi, kas apraksta kādu laikā mainīgu sistēmu.

Tātad,

- tiek novērota kāda sistēma laika gaitā;
- katrā brīdī tās vērtība ir nejauša;
- bet visam procesam ir noteikta (paredzama) struktūra.

Atsevišķas gadījuma procesa trajektorijas sauc par **realizācijām**.



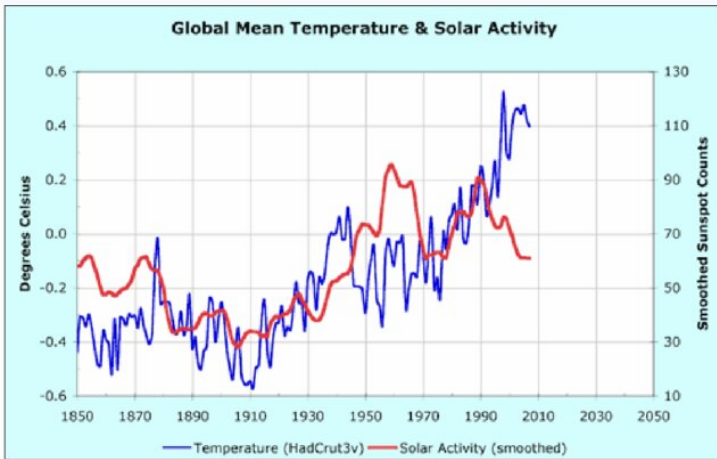
Gadījuma procesa piemērs I

Kriptovalūtu cenas, akciju tirgus indeksi, procentu likmju izmaiņas, u.c.



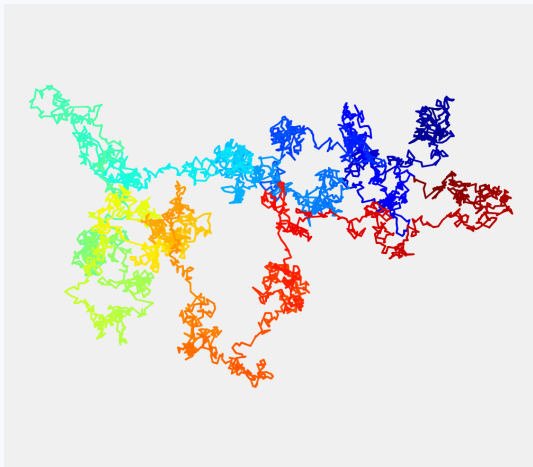
Gadījuma procesa piemērs II

Globālās temperatūras svārstības, saules aktivitāte, citi laikapstākļu novērojumi, u.c.



Gadījuma procesa piemērs III

Daļiņas kustība šķidrumā (Brauna kustība), dzīvnieka pārvietošanās dabā



Gadījuma procesi ar diskrētu laiku un stāvokļiem

- Laiku bieži apskata diskrētās laika vienībās - pa soļiem:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Gadījuma procesi ar diskrētu laiku un stāvokļiem

- Laiku bieži apskata diskrētās laika vienībās - pa soļiem:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Katrā solī procesu apraksta ar gadījuma lielumu:

$$X_0, X_1, X_2, X_3 \dots$$

Gadījuma procesi ar diskrētu laiku un stāvokļiem

- Laiku bieži apskata diskrētās laika vienībās - pa soļiem:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Katrā solī procesu apraksta ar gadījuma lielumu:

$$X_0, X_1, X_2, X_3 \dots$$

- Vērtības, kuras var pieņemt gadījuma lielums, sauc par **stāvokļiem**

Gadījuma procesi ar diskrētu laiku un stāvokļiem

- Laiku bieži apskata diskrētās laika vienībās - pa soļiem:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Katrā solī procesu apraksta ar gadījuma lielumu:

$$X_0, X_1, X_2, X_3 \dots$$

- Vērtības, kuras var pieņemt gadījuma lielums, sauc par **stāvokļiem**
- Process n soļos katrā stāvoklī k var nonākt ar noteiktu varbūtību:

$$P(X_n = k)$$

Gadījuma procesi ar diskrētu laiku un stāvokļiem

- Laiku bieži apskata diskrētās laika vienībās - pa soļiem:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- Katrā solī procesu apraksta ar gadījuma lielumu:

$$X_0, X_1, X_2, X_3 \dots$$

- Vērtības, kuras var pieņemt gadījuma lielums, sauc par **stāvokļiem**
- Process n soļos katrā stāvoklī k var nonākt ar noteiktu varbūtību:

$$P(X_n = k)$$

Matemātiski par stohastisku jeb gadījuma procesu saucsim aprakstīto gadījuma lielumu virkni.

Gadījuma klejošana pa veselajiem skaitļiem

Gadījuma klejošana pa veselajiem skaitļiem

Definīcija

Gadījuma klejošana ir process, kura stāvokļi ir vesēlie skaitļi $\mathbb{Z}$ un pārvietošanās notiek pēc sekojošas sistēmas:

- process vienmēr sākas punktā “0”,
- process pārvietojas pa labi (+1) ar varbūtību p ,
- process pārvietojas pa kreisi (-1) ar varbūtību $q = 1 - p$.

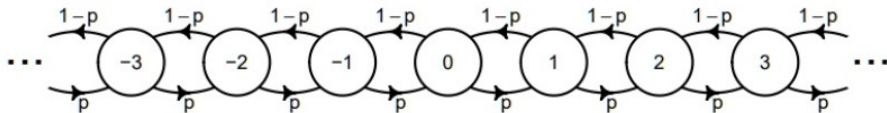
Gadījuma klejošana pa veselajiem skaitļiem

Definīcija

Gadījuma klejošana ir process, kura stāvokļi ir vesenie skaitļi $\mathbb{Z}$ un pārvietošanās notiek pēc sekojošas sistēmas:

- process vienmēr sākas punktā “0”,
- process pārvietojas pa labi (+1) ar varbūtību p ,
- process pārvietojas pa kreisi (-1) ar varbūtību $q = 1 - p$.

Procesu var ilustrēt ar sekojošu diagrammu:



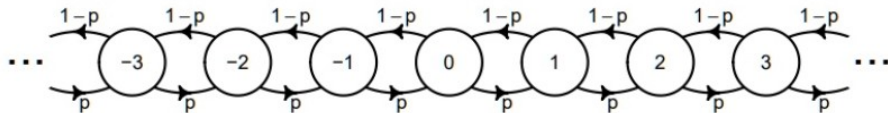
Gadījuma klejošana pa veselajiem skaitļiem

Definīcija

Gadījuma klejošana ir process, kura stāvokļi ir veseli skaitļi $\mathbb{Z}$ un pārvietošanās notiek pēc sekojošas sistēmas:

- process vienmēr sākas punktā "0",
- process pārvietojas pa labi (+1) ar varbūtību p ,
- process pārvietojas pa kreisi (-1) ar varbūtību $q = 1 - p$.

Procesu var ilustrēt ar sekojošu diagrammu:



Piezīme: Ja $p = q = 0.5$, tad procesu sauc par **vienkāršu simetrisku gadījuma klejošanu**.

Simetriskas gadījuma klejošanas piemērs

- Katrs iespējamais klejošanas rezultāts ir **realizācija (trajektorija)**.
- Piemērs:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Var izrēķināt, ka **pieaugumi** katrā solī bija

$$+1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, \dots$$

Simetriskas gadījuma klejošanas piemērs

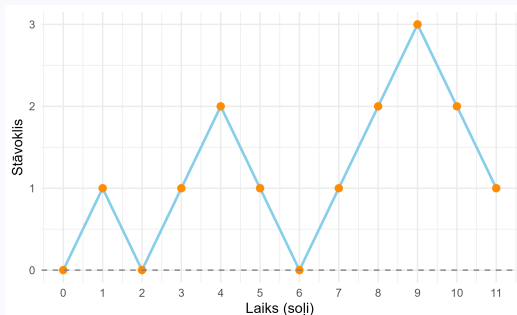
- Katrs iespējamais klejošanas rezultāts ir **realizācija (trajektorija)**.
- Piemērs:

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$$

Var izrēķināt, ka **pieaugumi** katrā solī bija

$$+1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, \dots$$

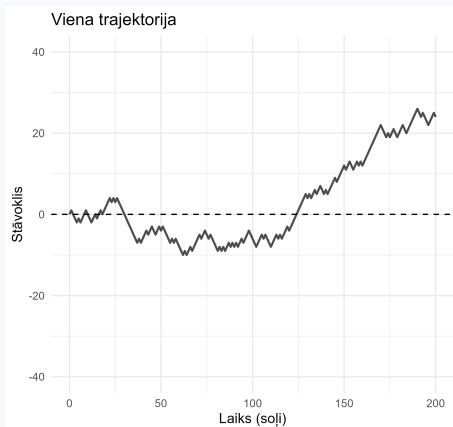
- Simetriskas gadījuma klejošanas trajektorija attēlota grafiski



Simetriskas gadījuma klejošanas simulācijas

Svarīgi!

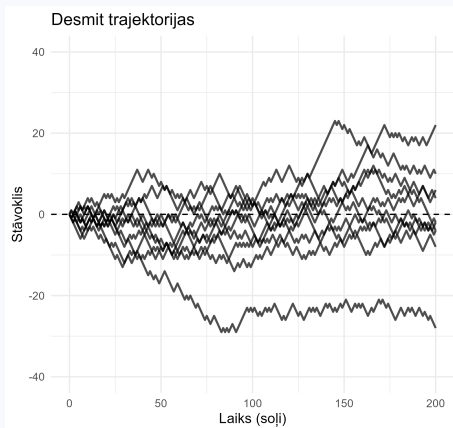
- Katra atsevišķa trajektorija ir **nejauša**;
- Bet — daudzas trajektorijas kopā atklāj strukturētas **likumsakarības**.



Simetriskas gadījuma klejošanas simulācijas

Svarīgi!

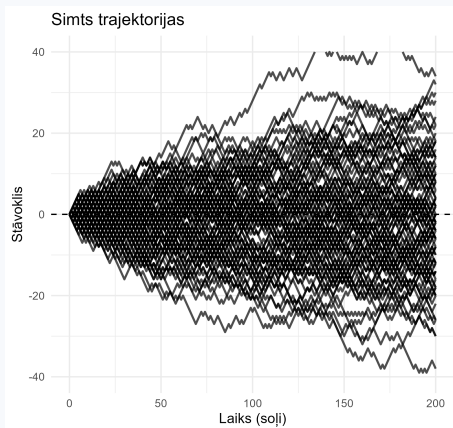
- Katra atsevišķa trajektorija ir **nejauša**;
- Bet — daudzas trajektorijas kopā atklāj strukturētas **likumsakarības**.



Simetriskas gadījuma klejošanas simulācijas

Svarīgi!

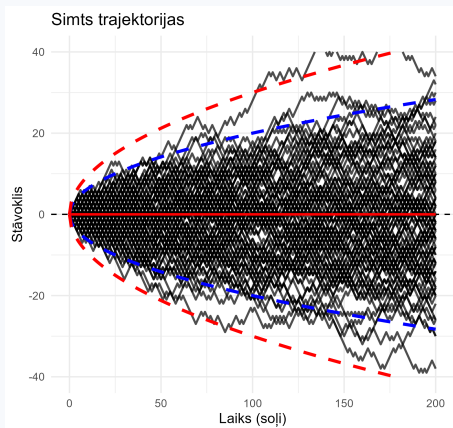
- Katra atsevišķa trajektorija ir **nejauša**;
- Bet — daudzas trajektorijas kopā atklāj strukturētas **likumsakarības**.



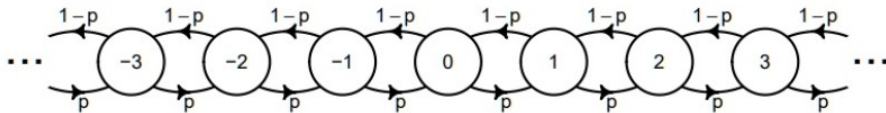
Simetriskas gadījuma klejošanas simulācijas

Svarīgi!

- Katra atsevišķa trajektorija ir **nejauša**;
- Bet — daudzas trajektorijas kopā atklāj strukturētas **likumsakarības**.



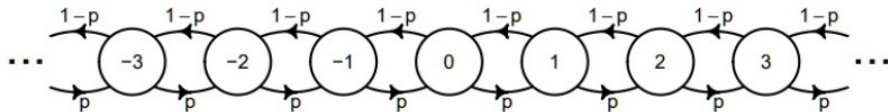
Vienkāršas gadījuma klejošanas varbūtības



Uzdevums:

Noteikt kādos stāvokļos un ar kādām varbūtībām process var nonākt n soļos!

Vienkāršas gadījuma klejošanas varbūtības



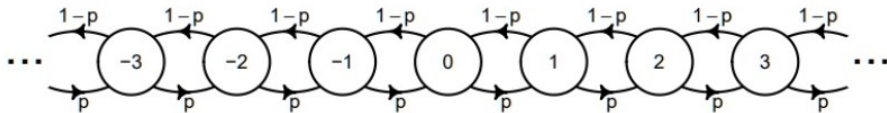
Uzdevums:

Noteikt kādos stāvokļos un ar kādām varbūtībām process var nonākt n soļos!

Ievērosim, ka

- 1 n soļos nevar nonākt kādā no stāvokļiem, kas ir lielāki par soļu skaitu. Tātad, **ja** $k < -n$ **vai** $k > n$, tad $P(X_n = k) = 0$;

Vienkāršas gadījuma klejošanas varbūtības



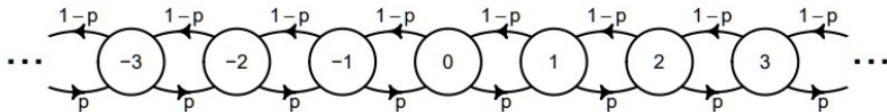
Uzdevums:

Noteikt kādos stāvokļos un ar kādām varbūtībām process var nonākt n soļos!

levērosim, ka

- 1 n soļos nevar nonākt kādā no stāvokļiem, kas ir lielāki par soļu skaitu. Tātad, **ja** $k < -n$ **vai** $k > n$, tad $P(X_n = k) = 0$;
- 2 process ir periodisks, tāpēc nepāra soļos nevar apmeklēt pāra stāvokļus un otrādi. Tātad, **ja** $n + k$ **ir nepāra**, tad $P(X_n = k) = 0$;

Vienkāršas gadījuma klejošanas varbūtības



Uzdevums:

Noteikt kādos stāvokļos un ar kādām varbūtībām process var nonākt n soļos!

levērosim, ka

- 1 n soļos nevar nonākt kādā no stāvokļiem, kas ir lielāki par soļu skaitu. Tātad, **ja** $k < -n$ **vai** $k > n$, tad $P(X_n = k) = 0$;
- 2 process ir periodisks, tāpēc nepāra soļos nevar apmeklēt pāra stāvokļus un otrādi. Tātad, **ja** $n + k$ **ir nepāra**, tad $P(X_n = k) = 0$;
- 3 tikai tad, **ja** $n + k$ **ir pāra**, tad

$$P(X_n = k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} = [\text{ja } p = q = 0.5] = C_n^{\frac{n+k}{2}} \cdot (0.5)^n$$

Nedaudz sarežģītāki varbūtību aprēķini gadījuma klejošanai

Uzdevums:

Aprēķināt varbūtību, ka simetrisks gadījuma klejošanas process **6. solī atradīsies stāvoklī “2”**, **10. solī atradīsies stāvoklī “4”** un **14. solī atradīsies stāvoklī “2”** jeb $P(X_6 = 2, X_{10} = 4, X_{14} = 2)$!

Nedaudz sarežģītāki varbūtību aprēķini gadījuma klejošanai

Uzdevums:

Aprēķināt varbūtību, ka simetrisks gadījuma klejošanas process **6. solī atradīsies stāvoklī “2”**, **10. solī atradīsies stāvoklī “4”** un **14. solī atradīsies stāvoklī “2”** jeb $P(X_6 = 2, X_{10} = 4, X_{14} = 2)$!

Atrisinājums:

$$\begin{aligned} P(X_6 = 2, X_{10} = 4, X_{14} = 2) &= \\ &= P(X_6 - X_0 = 2 - 0, X_{10} - X_6 = 4 - 2, X_{14} - X_{10} = 2 - 4) = \\ &= P(X_6 - X_0 = 2 - 0) \cdot P(X_{10} - X_6 = 4 - 2) \cdot P(X_{14} - X_{10} = 2 - 4) = \\ &= P(X_{6-0} = 2) \cdot P(X_{10-6} = 2) \cdot P(X_{14-10} = -2) = \\ &= P(X_6 = 2) \cdot P(X_4 = 2) \cdot P(X_4 = -2) = \\ &= C_6^4 (0.5)^6 \cdot C_4^3 (0.5)^4 \cdot C_4^1 (0.5)^4 = \\ &= \frac{15}{64} \cdot \frac{4}{16} \cdot \frac{4}{16} = \frac{15}{1024} \approx 0.01465 \end{aligned}$$

Spēlmaņa bankrota problēma

Spēlmaņa bankrota problēma (*Gambler's ruin*)

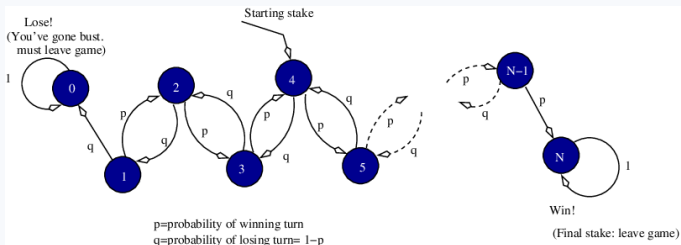
Problēmas formulējums:

Azartspēļu spēlmanis dodas uz kazino ar naudas summu i EUR un izdara likmes pēc sekojošas shēmas – katrā reizē der uz 1 EUR, ar varbūtību p to dubultojot, savukārt ar varbūtību $1 - p = q$ to zaudējot. Kāda varbūtība, ka spēlmanis vinnēs naudas summu N pirms būs bankrotējis?

Spēlmaņa bankrota problēma (*Gambler's ruin*)

Problēmas formulējums:

Azartspēļu spēlmanis dodas uz kazino ar naudas summu i EUR un izdara likmes pēc sekojošas shēmas – katrā reizē der uz 1 EUR, ar varbūtību p to dubultojot, savukārt ar varbūtību $1 - p = q$ to zaudējot. Kāda varbūtība, ka spēlmanis vinnēs naudas summu N pirms būs bankrotējies?

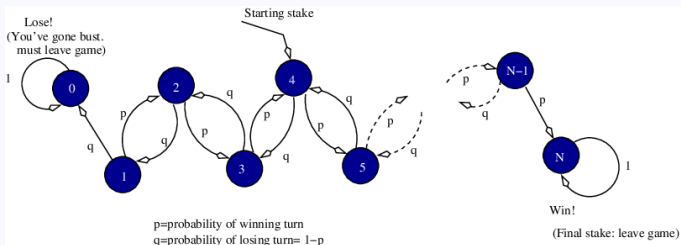


Ar X_n apzīmē spēlmaņa naudas daudzumu n -tajā solī.

Spēlmaņa bankrota problēma (*Gambler's ruin*)

Problēmas formulējums:

Azartspēļu spēlmanis dodas uz kazino ar naudas summu i EUR un izdara likmes pēc sekojošas shēmas – katrā reizē der uz 1 EUR, ar varbūtību p to dubultojot, savukārt ar varbūtību $1 - p = q$ to zaudējot. Kāda varbūtība, ka spēlmanis vinnēs naudas summu N pirms būs bankrotējies?



Ar X_n apzīmē spēlmaņa naudas daudzumu n -tajā solī.

Piemēram, ja $i = 5$, tad viena realizācija varētu būt:

$$5 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

Spēlmaņa bankrota problēma

Piezīme: Matemātiski Spēlmaņa bankrota problēmu definē ar gadījuma klejošanas procesu, kur stāvokļi “0” (bankrots) un “ N ” (vinnests) ir absorbējošas barjeras.

Spēlmaņa bankrota problēma

Piezīme: Matemātiski Spēlmaņa bankrota problēmu definē ar gadījuma klejošanas procesu, kur stāvokļi “0” (bankrots) un “ N ” (vinnests) ir absorbējošas barjeras.

Apzīmēsim:

- p_{ij} - varbūtība pāriet no stāvokļa i uz j ;
- p_i - varbūtība jebkad nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa i

Spēlmaņa bankrota problēma

Piezīme: Matemātiski Spēlmaņa bankrota problēmu definē ar gadījuma klejošanas procesu, kur stāvokļi “0” (bankrots) un “ N ” (vinnests) ir absorbējošas barjeras.

Apzīmēsim:

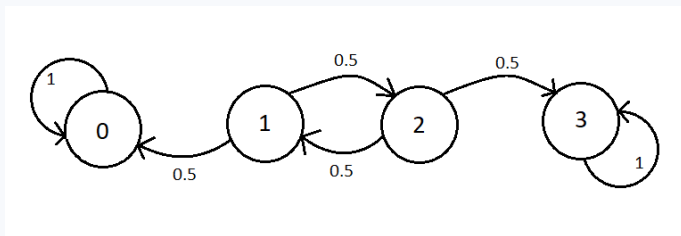
- p_{ij} - varbūtība pāriet no stāvokļa i uz j ;
- p_i - varbūtība jebkad nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa i

Spēlmaņa bankrota gadījumā:

- $p_{00} = 1$ un $p_{NN} = 1$, jo tie ir absorbējoši stāvokļi;
- $p_{ii-1} = q$ un $p_{ii+1} = p$, kad $i = 1, 2, \dots, N - 1$;
- Lai atrastu varbūtību vinnēt pirms bankrotēt, jāizsaka p_i katram stāvoklim i atkarībā no p , q un N .

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

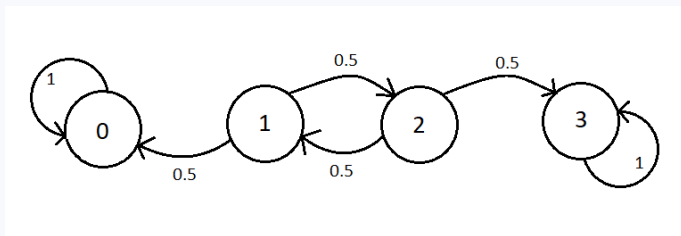
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”?

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

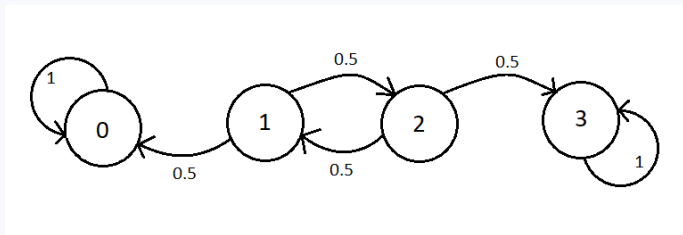
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

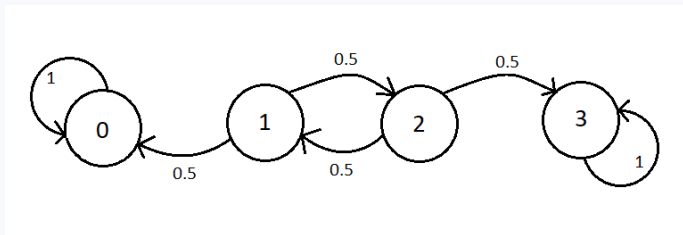
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ” ?

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

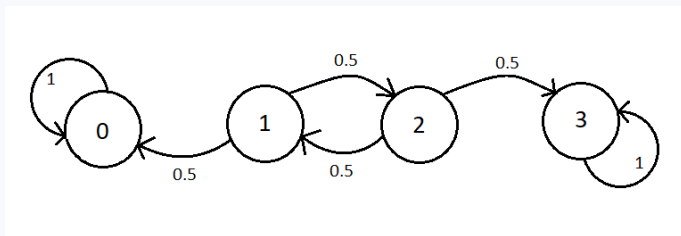
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ”? $p_N = 1$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

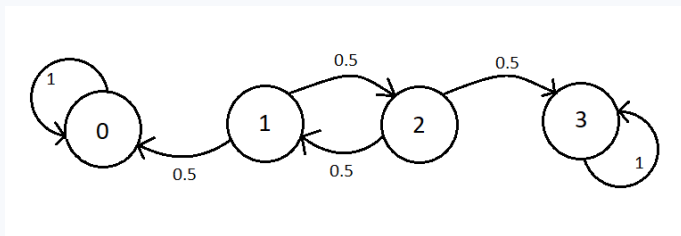
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ”? $p_N = 1$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “1”?

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

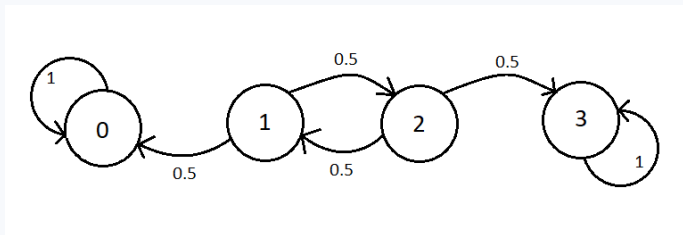
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ”? $p_N = 1$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “1”? $p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

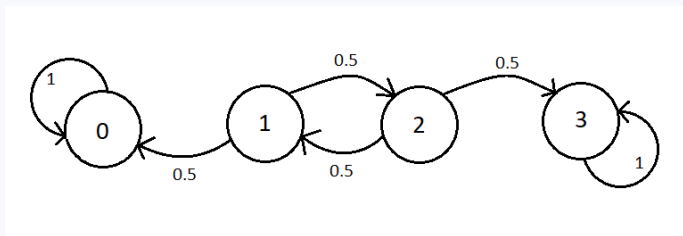
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ”? $p_N = 1$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “1”? $p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “2”?

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

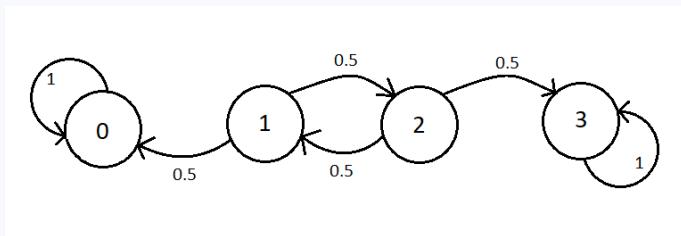
Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa "0"? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa " N " ? $p_N = 1$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no "1"? $p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no "2"? $p_2 = 0.5 \cdot p_1 + 0.5 \cdot p_N$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Apskatīsim piemēru Spēlmaņa bankrota problēmai, kur $N = 3$ un $p = q = 0.5$. Aprēķināsim, kāda varbūtība vinnēt N EUR, sākot no jebkura stāvokļa i , ko apzīmējam ar p_i



- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “0”? $p_0 = 0$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa “ N ”? $p_N = 1$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “1”? $p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2$
- Varbūtība nonākt stāvoklī N , sākot no “2”? $p_2 = 0.5 \cdot p_1 + 0.5 \cdot p_N$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 \\ p_N = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \frac{1}{3} \\ p_2 = \frac{2}{3} \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \frac{1}{3} \\ p_2 = \frac{2}{3} \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Atbilde:

Varbūtība, ka spēlmanis vinnēs 3 EUR pirms būs bankrotējis ir

- $1/3$, ja viņam sākotnēji bija 1 EUR;
- $2/3$, ja viņam sākotnēji bija 2 EUR.

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \frac{1}{3} \\ p_2 = \frac{2}{3} \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Atbilde:

Varbūtība, ka spēlmanis vinnēs 3 EUR pirms būs bankrotējis ir

- $1/3$, ja viņam sākotnēji bija 1 EUR;
- $2/3$, ja viņam sākotnēji bija 2 EUR.

Hei, šis bija tīīīīk viegli!

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vienkāršs piemērs)

Esam ieguvuši lineāru vienādojumu sistēmu, kas ir jāatrisina, lai iegūtu varbūtības vinnēt naudas daudzumu N EUR pirms bankrotēt:

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_0 + 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 p_N \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = 0.5 p_2 \\ p_2 = 0.5 p_1 + 0.5 \\ p_N = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = \frac{1}{3} \\ p_2 = \frac{2}{3} \\ p_N = 1 \end{cases}$$

Atbilde:

Varbūtība, ka spēlmanis vinnēs 3 EUR pirms būs bankrotējis ir

- $1/3$, ja viņam sākotnēji bija 1 EUR;
- $2/3$, ja viņam sākotnēji bija 2 EUR.

Hei, šis bija tīīīīk viegli! Labi, tad apskatīsim varbūtības vispārīgā gadījumā ...

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

Sastādam vienādojumu sistēmu, kuras atrisinājums dos varbūtības p_i - nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa i .

$$\begin{cases} p_0 = 0, & p_N = 1; \\ p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

Sastādam vienādojumu sistēmu, kuras atrisinājums dos varbūtības p_i - nonākt stāvoklī N , sākot no stāvokļa i .

$$\begin{cases} p_0 = 0, & p_N = 1; \\ p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}, & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Lai to atrisinātu veiksīm sekojošas darbības un pārveidojumus:

- Tā kā $p + q = 1$, tad

$$p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}$$

$$(p + q)p_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}$$

$$pp_i + qp_i = pp_{i+1} + qp_{i-1}$$

$$pp_{i+1} - pp_i = qp_{i-1} - qp_i$$

$$p(p_{i+1} - p_i) = q(p_{i-1} - p_i)$$

$$p_{i+1} - p_i = \frac{q}{p}(p_i - p_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

- Izmantojam $p_0 = 0$, tad

$$p_2 - p_1 = \frac{q}{p} p_1$$

$$p_3 - p_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 p_1$$

...

$$p_i - p_{i-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} p_1$$

...

$$p_N - p_{N-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} p_1.$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

- Saskaitot pirmos $i - 1$ vienādojumus iegūstam

$$p_i - p_1 = p_1 \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p} \right)^{i-1} \right)$$

vai

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)} p_1, & \text{ja } \frac{q}{p} \neq 1 \\ ip_1, & \text{ja } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

- Saskaitot pirmos $i - 1$ vienādojumus iegūstam

$$p_i - p_1 = p_1 \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p} \right)^{i-1} \right)$$

vai

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)} p_1, & \text{ja } \frac{q}{p} \neq 1 \\ ip_1, & \text{ja } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

- Izmantojam $p_N = 1$, tāpēc

$$1 = p_N = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p} \right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p} \right)} p_1, & \text{ja } \frac{q}{p} \neq 1 \\ Np_1, & \text{ja } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

- Iegūstam, ka

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}, & \text{ja } \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{1}{N}, & \text{ja } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

- Tāpēc

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{ja } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & \text{ja } p = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Kas notiek, kad $N \rightarrow \infty$?

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

- Iegūstam, ka

$$p_1 = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{ja } \frac{q}{p} \neq 1 \\ \frac{1}{N}, & \text{ja } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}.$$

- Tāpēc

$$p_i = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, & \text{ja } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, & \text{ja } p = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

- Kas notiek, kad $N \rightarrow \infty$?

$$p_i \rightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{ja } p > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ja } p \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

Secinājumi:

- Varbūtība spēlmanim kļūt “bezgalīgi bagātam” ($N \rightarrow \infty$) ir 0, kad $p \leq \frac{1}{2}$;
- Varbūtība spēlmanim bankrotēt vienmēr ir 100 %, ja spēle ir godīga ($p = q = \frac{1}{2}$) vai kazino labā ($p < \frac{1}{2}$), jo

$$P(\text{bankrots}) = 1 - P(\text{bezgalīgi bagāts}) = 1 - 0 = 1 \text{ jeb } 100\%.$$

- Ja spēle ir par labu spēlmanim, t.i., $p > \frac{1}{2}$, tad varbūtība bankrotēt

$$P(\text{bankrots}) = 1 - \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^i \right] = \left(\frac{q}{p} \right)^i$$

Spēlmaņa varbūtība vinnēt (vispārīgā gadījumā)

Secinājumi:

- Varbūtība spēlmanim kļūt “bezgalīgi bagātam” ($N \rightarrow \infty$) ir 0, kad $p \leq \frac{1}{2}$;
- Varbūtība spēlmanim bankrotēt vienmēr ir 100 %, ja spēle ir godīga ($p = q = \frac{1}{2}$) vai kazino labā ($p < \frac{1}{2}$), jo

$$P(\text{bankrots}) = 1 - P(\text{bezgalīgi bagāts}) = 1 - 0 = 1 \text{ jeb } 100\%.$$

- Ja spēle ir par labu spēlmanim, t.i., $p > \frac{1}{2}$, tad varbūtība bankrotēt

$$P(\text{bankrots}) = 1 - \left[1 - \left(\frac{q}{p} \right)^i \right] = \left(\frac{q}{p} \right)^i$$

- **Nevienā kazino nebūs situācija, ka $p \geq q$!!!**

Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle "Rulete")

Situācija

Spēlmanis dodas uz kazino ar sākuma kapitālu **100 EUR** un spēlē ruleti.



- Spēlmanis liek uz krāsu: **sarkans** vai **meln**s;
- Vienas likmes lielums ir **1 EUR**;
- Ja krāsa tiek atminēta, laimests ir **1 EUR**;
- Ja krāsa netiek atminēta, **1 EUR** tiek zaudēts.

Kāda ir varbūtība, ka spēlmanis **dubultos savu sākuma kapitālu** un sasniegs **200 EUR** pirms bankrotēs?

Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle "Rulete")

Dots: $i = 100$ EUR, $N = 200$ EUR



- Kopā 37 skaitļi (" 0 " + 36), 18 sarkani
- $p = \frac{18}{37} = 0.486$
- $\frac{q}{p} = \frac{0.514}{0.486} = 1.058$
- $p_{100} = \frac{1 - 1.058^{100}}{1 - 1.058^{200}} \approx 0.00355$

Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle "Rulete")

Dots: $i = 100$ EUR, $N = 200$ EUR



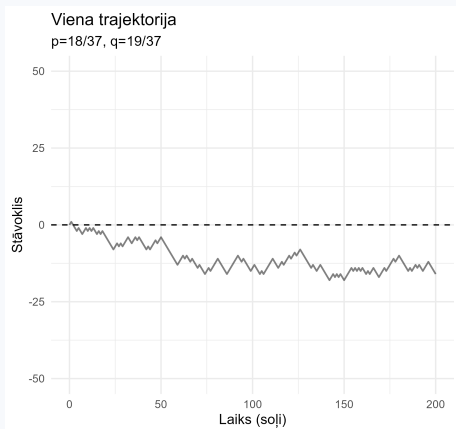
- Kopā 37 skaitļi (" 0 " + 36), 18 sarkani
- $p = \frac{18}{37} = 0.486$
- $\frac{q}{p} = \frac{0.514}{0.486} = 1.058$
- $p_{100} = \frac{1 - 1.058^{100}}{1 - 1.058^{200}} \approx 0.00355$

Atbilde: Varbūtība, ka spēlmanis vinnēs 200 EUR, ja viņam ir 100 EUR un viņš spēlē ruleti, izdarot 1 EUR likmes par krāsu, ir 0,355 %.

Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle “Rulete”)

Ruletes spēles pamatā ir nesimetriska gadījuma klejošana, kad $p = 0.486$!

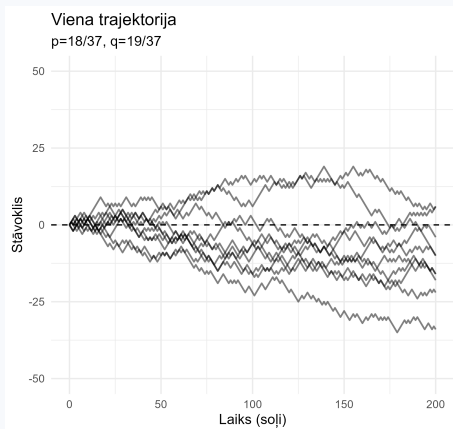
Gadījuma klejošanas simulācijas ar šādu varbūtību ir attēlotas ar sekojošām trajektorijām:



Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle “Rulete”)

Ruletes spēles pamatā ir nesimetriska gadījuma klejošana, kad $p = 0.486$!

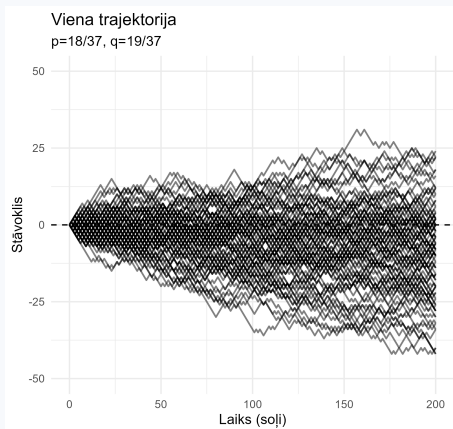
Gadījuma klejošanas simulācijas ar šādu varbūtību ir attēlotas ar sekojošām trajektorijām:



Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle “Rulete”)

Ruletes spēles pamatā ir nesimetriska gadījuma klejošana, kad $p = 0.486$!

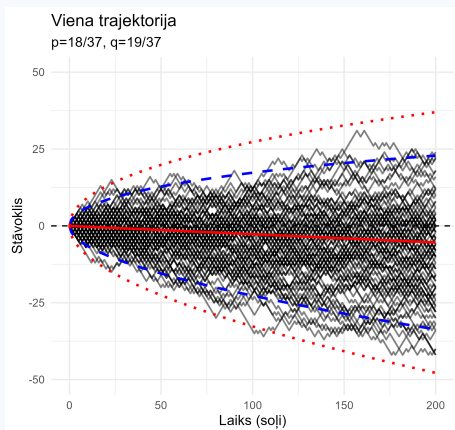
Gadījuma klejošanas simulācijas ar šādu varbūtību ir attēlotas ar sekojošām trajektorijām:



Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle “Rulete”)

Ruletes spēles pamatā ir nesimetriska gadījuma klejošana, kad $p = 0.486$!

Gadījuma klejošanas simulācijas ar šādu varbūtību ir attēlotas ar sekojošām trajektorijām:



Spēlmaņa bankrota piemērs (kazino spēle “Rulete”)

Jautājumi pārdomām:

- Attēlā redzama amerikāņu rulete. Kā tā atšķirās no iepriekš apskatītās Eiropas ruletes? Kā tiek ietekmētas varbūtības vinnēt/bankrotēt?



- Vai un kā mainītos varbūtības vinnēt/bankrotēt, ja spēlmanis izdarītu likmes nevis uz **1 EUR**, bet, piemēram, uz **10 EUR** vienā gājienā? Pārdomāt, kā izmantot iepriekš izvesto formulu varbūtību aprēķināšanai šajā gadījumā.

Sagaidāmais loterijas ieguvums

Kas ir sagaidāmais ieguvums?

Sagaidāmais vienas biļetes ieguvums:

Sagaidāmā vērtība parāda, cik daudz vidēji tiek iegūts vai zaudēts ilgtermiņā no katras loterijas biļetes.

$E(X)$ = Vidējais vienas biļetes laimests – Vienas biļetes izmaksas

- Ja $E(X) > 0 \rightarrow$ spēle ir izdevīga;
- Ja $E(X) < 0 \rightarrow$ spēle ir neizdevīga;
- Ja $E(X) = 0 \rightarrow$ godīga spēle.

Pieņemsim:

- Biļetes cena: 2 EUR;
- Laimests: 1000 EUR;
- Varbūtība laimēt: 1 no 1000.

Sagaidāmais vienas biļetes ieguvums:

$$E(X) = 1000 \cdot \frac{1}{1000} - 2 = 1 - 2 = -1$$

Secinājums:

Vidēji spēlētājs zaudē **1 EUR** no katras biļetes.

Kā intuitīvi labāk saprast sagaidāmo vērtību?

Pieņemsim, ka 1000 cilvēki nopērk loterijas biļeti par 2 EUR.

- Kopā samaksā: 2000 EUR;
- Laimē: 1000 EUR;
- Kopējais zaudējums: 1000 EUR;
- Vidējais zaudējums vienam cilvēkam: 1 EUR.

Tātad,

$$E(X) = -1 \text{ EUR}$$

Secinājums:

Ja n dienas pēc kārtas katru dienu pirsīsi pa vienai loterijas biļetei par 2 EUR, tad ilgtermiņā vidēji būsi zaudējis n EUR.

Eurojackpot – vai tā ir izdevīga spēle?

Eurojackpot noteikumi (aptuveni):

- Biļetes cena: 2 EUR;
- Varbūtība vinnēt galveno laimestu:

$$\frac{1}{139\,838\,160}$$

- Pieņemsim, ka galvenais laimests ir 10 000 000 EUR.

Sagaidāmā vērtība (tikai galvenajam laimestam):

$$E(X) = 10\,000\,000 \cdot \frac{1}{139\,838\,160} - 2 \approx 0.072 - 2 = -1.928$$

Secinājums:

Vidēji spēlētājs zaudē apmēram **1.93 EUR** no katras biļetes.

Martingāļa stratēģija

Martingāļa stratēģijas ideja ir:

- Ja zaudē $\rightarrow$ spēlmanis dubulto savu likmi;
- Ja uzvar $\rightarrow$ atgūst visus zaudējumus + 1 EUR.

Piemērs:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Martingāļa stratēģija

Martingāļa stratēģijas ideja ir:

- Ja zaudē → spēlmanis dubulto savu likmi;
- Ja uzvar → atgūst visus zaudējumus + 1 EUR.

Piemērs:

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Šķiet laba ideja... Bet vai tā tiešām strādā?

Problēmas ar martingāļa stratēģiju:

- Nepieciešams ļoti liels sākuma kapitāls, piemēram, likme pēc 10 zaudējumu sērijas ir jau 1023 EUR;
- Kazino ir likmju limiti un nav atļauts bezgalīgi dubultot savas likmes;
- Ilga zaudējumu sērija agrāk vai vēlāk notiks, piemēram,

$$P(10 \text{ zaudējumu sērija}) = \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0.0013$$

- **Svarīgi:** neviena stratēģija nevar padarīt neizdevīgu spēli izdevīgu!

Noslēgums un jautājumi pārdomām

Ko mēs šodien iemācījamies?

- Devinēt vienkāršu simetrisku un nesimetrisku gadījuma klejošanas procesu;
- Pat ja individuālas realizācijas šķiet haotiskas un nejaušas, ilgtermiņā parādās dažādas likumsakarības;
- Ar gadījuma klejošanas palīdzību var modelēt Spēlmaņa bankrota problēmu;
- Realitātē - ilgtermiņā spēlmanis vienmēr zaudē, kazino - uzvar;
- Ja spēles sagaidāmā vērtība ir negatīva, tad kapitāls vidēji samazinās;
- Jo ilgāk spēlē, jo lielāki zaudējumi.

Jautājums nav, **vai** spēlmanis zaudēs, bet **kad** spēlmanis būs zaudējis visu naudu.

Kāpēc cilvēki tomēr spēlē loteriju?

- Pastāv ļoti maza varbūtība vinnēt ļoti lielu summu, bet cilvēki mēdz pārvērtēt mazas varbūtības;
- Cilvēkiem patīk risks un azarts;
- Cilvēki bieži domā, ka tieši viņiem “paveiksies”. Kādam arī paveicās, bet kas notiek ar pārējiem?

Kāpēc cilvēki tomēr spēlē loteriju?

- Pastāv ļoti maza varbūtība vinnēt ļoti lielu summu, bet cilvēki mēdz pārvērtēt mazas varbūtības;
- Cilvēkiem patīk risks un azarts;
- Cilvēki bieži domā, ka tieši viņiem “paveiksies”. Kādam arī paveicās, bet kas notiek ar pārējiem?

Jautājumi pārdomām:

- Vai tu spēlētu spēli, kur sagaidāmais ieguvums ir negatīvs?
- Cik daudz cilvēkiem vajadzētu spēlēt, lai kazino pelnītu?
- Vai pastāv stratēģija, kas var uzvarēt kazino?
- Kāpēc cilvēki turpina spēlēt, pat zinot matemātiku?
- Vai loterija ir izklaide vai finanšu lēmums?

Kāpēc cilvēki tomēr spēlē loteriju?

- Pastāv ļoti maza varbūtība vinnēt ļoti lielu summu, bet cilvēki mēdz pārvērtēt mazas varbūtības;
- Cilvēkiem patīk risks un azarts;
- Cilvēki bieži domā, ka tieši viņiem “paveiksies”. Kādam arī paveicās, bet kas notiek ar pārējiem?

Jautājumi pārdomām:

- Vai tu spēlētu spēli, kur sagaidāmais ieguvums ir negatīvs?
- Cik daudz cilvēkiem vajadzētu spēlēt, lai kazino pelnītu?
- Vai pastāv stratēģija, kas var uzvarēt kazino?
- Kāpēc cilvēki turpina spēlēt, pat zinot matemātiku?
- Vai loterija ir izklaide vai finanšu lēmums?

Vai tu vēl pirksi loterijas biļeti?

Paldies par uzmanību!

Kontakti: leonora.pahirko@lu.lv, LU, Zinātņu māja 723.kab.