

Svēršanas uzdevumi

EZTF MSP “Matemātika un datu zinātne”
1. kursa studente
Agnete Saule

03.10.2026.

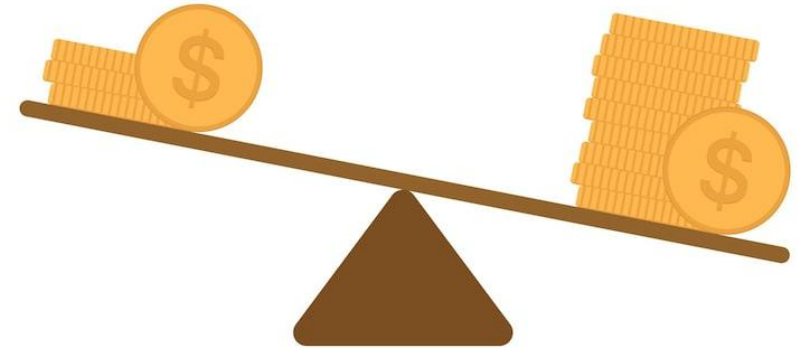
Kāpēc svēršanas uzdevumi?

Latvijas 52. atklātās matemātikas olimpiādē katrai klašu grupai būs viens uzdevums par tēmu
“Svēršanas uzdevumi”.

Sviras svari



Sviras sviri



Atsvari



Šo uzdevumu atrisinājumi lielākoties balstās uz loģisku spriedumu ceļā izveidotām objektu grupēšanas metodēm.

legaumē

Ja uzdevumā ir jautājums “Kā...?”, tad atrisinājumā ir jāapskata, kā rīkoties pilnīgi visās iespējamās situācijās, lai panāktu prasīto rezultātu. Nepietiek apskatīt tikai vienu vai dažus “labvēlīgākos” gadījumus.

Pamatprincipi

Trīs iespējamie svēršanas rezultāti

Katras svēršanas rezultāts var būt viens no trim: līdzsvars, kreisais kauss ir smagāks (zemāks) vai labais kauss ir smagāks (zemāks). Risinot uzdevumu, jāizmanto informācija, ko dod katrs no šiem rezultātiem.

Trīs iespējamie svēršanas rezultāti

Katras svēršanas rezultāts var būt viens no trim: līdzsvars, kreisais kauss ir smagāks (zemāks) vai labais kauss ir smagāks (zemāks). Risinot uzdevumu, jāizmanto informācija, ko dod katrs no šiem rezultātiem.

Piemērs. Dotas 3 monētas, no kurām viena ir vieglāka par pārējām. Nosveram vienu monētu pret otru.

Novērojums. Ja svari ir līdzsvarā, tad vieglāka ir trešā monēta. Ja svari nav līdzsvarā, tad vieglāka ir monēta uz augstākā kausa.

Līdzsvara izmantošana

Līdzsvars bieži ļauj uzreiz izslēgt vairākus no iespējamajiem atšķirīgajiem objektiem. Ja uz abiem kausiem atrodas vienāds skaits objektu, kuriem vajadzētu būt vienādas masas, un svāri atrodas līdzsvarā, tad atšķirīgais objekts neatrodas uz neviena no šiem kausiem.

Līdzsvara izmantošana

Līdzsvars bieži ļauj uzreiz izslēgt vairākus no iespējamajiem atšķirīgajiem objektiem. Ja uz abiem kausiem atrodas vienāds skaits objektu, kuriem vajadzētu būt vienādas masas, un svāri atrodas līdzsvarā, tad atšķirīgais objekts neatrodas uz neviena no šiem kausiem.

Piemērs. Dotas 9 monētas, no kurām viena ir vieglāka par pārējām. Trīs monētas nosveram pret trim citām, un svāri ir līdzsvarā.

Novērojums. Tātad vieglākā monēta noteikti ir starp tām monētām, kuras netika svērtas.

Noteikti īsta objekta atrašana

Dažos uzdevumos ir izdevīgi vispirms atrast objektu, par kuru noteikti zināms, ka tas nav atšķirīgais. Šādu objektu pēc tam var izmantot kā atskaiti citās svēršanās.

Noteikti īsta objekta atrašana

Dažos uzdevumos ir izdevīgi vispirms atrast objektu, par kuru noteikti zināms, ka tas nav atšķirīgais. Šādu objektu pēc tam var izmantot kā atskaiti citās svēršanās.

Piemērs. Dotas 4 monētas, no kurām viena ir viltota, bet nav zināms, vai tā ir smagāka vai vieglāka par pārējām. Nosauksim tās par A , B , C , D . Nosveram monētu A pret monētu B .

Novērojums. Ja svāri ir līdzsvarā, tad gan A , gan B ir īstas. Ja svāri nav līdzsvarā, tad monētas C un D noteikti ir īstas. Tātad ar vienu svēršanu varam iegūt monētu, par kuru noteikti zinām, ka tā ir īsta.

Objektu grupu salīdzināšana

Ne vienmēr jānosver objekti pa vienam. Dažkārt izdevīgāk ir salīdzināt uzreiz divas vai vairākas objektu grupas.

Objektu grupu salīdzināšana

Ne vienmēr jānosver objekti pa vienam. Dažkārt izdevīgāk ir salīdzināt uzreiz divas vai vairākas objektu grupas.

Piemērs. Dotas 6 monētas, nosauksim tās par A , B , C , D , E , F , no kurām viena ir vieglāka par pārējām. Nosveram monētas $A + B$ pret $C + D$.

Novērojums. Ja svāri ir līdzsvarā, vieglākā monēta ir starp E un F . Ja svāri nav līdzsvarā, vieglākā monēta atrodas uz augstākā kausa. Tādējādi viena svēršana ļauj sadalīt visas sešas iespējamās monētas divās vai trīs mazākās grupās.

Pāris vieglāki uzdevumi

1. uzdevums

Dotas 20 pēc ārēja izskata vienādas monētas, bet visas to masas ir dažādas. Kā, izmantojot sviras svarus bez atsvariem, ar 28 svēršanām atrast gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu?

1. uzdevums

Atrisinājums. Sadalām monētas pa pāriem un salīdzinām katra pāra monētas – nosakām vieglāko un smagāko monētu katrā pārī. Pēc katras svēršanas vieglāko monētu liekam vienā kaudzītē, bet smagāko – otrā kaudzītē. Tā kā ir $20 : 2 = 10$ pāri, tad ir veiktas 10 svēršanas. (Skat. 1. att.) Skaidrs, ka visvieglākā monēta jāmeklē starp vieglākajām, bet vissmagākā – starp smagākajām. Apskatām katru kaudzīti atsevišķi.

No kaudzītes, kurā ir vieglākās monētas, paņemam divas un salīdzinām tās, vieglāko atstājam svaros un salīdzinām ar nākamo, atkal svaros atstājot vieglāko. Tā turpinām, kamēr visas atlikušās monētas no šīs kaudzītes ir nosvērtas. Pēdējās svēršanas vieglākā monēta ir pati vieglākā no visām. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Analogiski no kaudzītes, kurā ir smagākās monētas, atrod pašu smagāko no visām – svaros visu laiku jāatstāj smagākā monēta, bet vieglākā jāmet prom. Kopā tika veiktas 9 svēršanas.

Līdz ar to ar $10 + 9 + 9 = 28$ svēršanām esam atraduši gan pašu vieglāko, gan pašu smagāko monētu.



1. att.

2. uzdevums

Dotas 9 pēc ārēja izskata vienādas monētas, no kurām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā citas. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu, ja zināms, ka visu īsto monētu masas ir vienādas?

2. uzdevums

Atrisinājums. Sadalām šīs monētas trīs kaudzītēs pa 3 monētām katrā. Skaidrs, ka viltotā monēta atrodas vienā no šīm kaudzītēm. Pirmajā svēršanā salīdzinām divas no šīm kaudzītēm.

(A) Ja viena kaudzīte ir vieglāka nekā otra, tad viltotā (vieglākā) monēta ir šajā kaudzītē (skat. 2. att. (A)).

(B) Ja abām kaudzītēm ir vienāda masa, tad viltotā monēta ir trešajā, nesvērtajā kaudzītē (skat. 2. att. (B)).

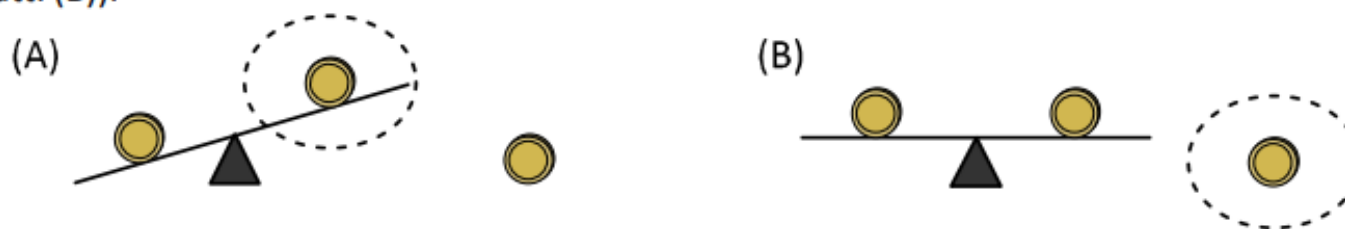


2. att.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Otrajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai no šīs kaudzītes.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 3. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē netika svērtā (skat. 3. att. (B)).



3. att.

3. uzdevums

Zināms, ka no 80 monētām viena ir viltota – tā ir vieglāka nekā pārējās, kurām visām masa ir vienāda. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast viltoto monētu?

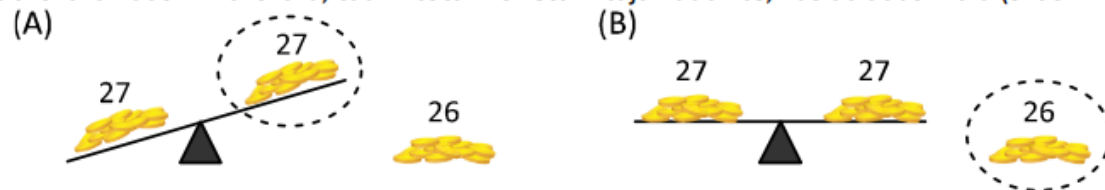
3. uzdevums

Atrisinājums. Sadalām monētas trīs kaudzītēs: divas kaudzītes pa 27 monētām katrā un viena kaudzīte, kurā ir 26 monētas.

Pirmajā svēršanā salīdzinām kaudzītes, kurās ir pa 27 monētām. Iespējami divi gadījumi.

(A) Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta (skat. 4. att. (A)).

(B) Ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tajā kaudzītē, kas atradās malā (skat. 4. att. (B)).



4. att.

Tālāk apskatīsim tikai to kaudzīti, kurā ir viltotā monēta, pārējās kaudzītes vairs nav nepieciešamas. Tātad atlikušajās trīs svēršanās no 27 monētām jāatrod viltotā. (Ja viltotā monēta atradās kaudzītē, kurā bija 26 monētas, tad šai kaudzītei pievienojot vienu "īsto" monētu no citas kaudzītes, arī iegūstam kaudzīti, kurā ir 27 monētas.)

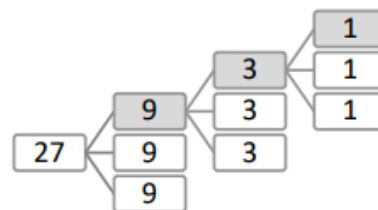
Sadalām 27 monētas trīs vienādās kaudzītēs pa 9 monētām katrā un otrajā svēršanā salīdzināsim savā starpā divas no šīm kaudzītēm. Atkārtējot tādus pašus spriedumus kā pēc pirmās svēršanas, atrodam to deviņu monētu kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.

Pirms trešās svēršanas atkal kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta sadalām trīs vienādās kaudzītēs pa trim monētām katrā un atkal salīdzinām divas no šīm kaudzītēm. Nosakām, kurā no šīm trīs monētu kaudzītēm atrodas viltotā monēta.

Ceturtajā svēršanas reizē uz svaru kausiem liekam pa vienai monētai. Ja viens svaru kauss ir vieglāks nekā otrs, tad uz tā atrodas viltotā monēta, ja abi svaru kausi ir līdzsvarā, tad viltotā monēta ir tā, kas šajā svēršanas reizē palika malā (netika svērtā).

3. uzdevums

(Shematiski monētu dalīšana mazākās kaudzītēs parādīta 5. att., iekrāsojums apzīmē kaudzīti, kurā atrodas viltotā monēta.)



5. att.

4. uzdevums

Dotas 25 pēc ārēja izskata vienādas monētas. Zināms, ka 24 monētu masas ir vienādas savā starpā, bet vienas monētas masa ir citāda. Kā ar divām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot, vai atšķirīgā monēta ir vieglāka vai smagāka nekā pārējās? (Pašu monētu atrast nav nepieciešams.)

4. uzdevums

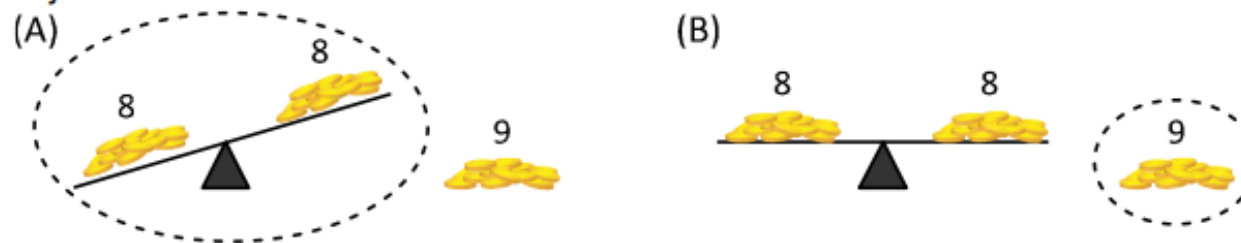
Atrisinājums. Uzliekam uz katra svaru kausa 8 monētas.

(A) Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir atradusies uz svariem (skat. 6. att. (A)). Otrajā svēršanā salīdzinām vieglākā kausa 8 monētas ar jebkurām 8 malā palikušajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “smagākā” kausa un ir smagāka nekā citas monētas.
- Ja svaru kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta pirmajā svēršanā ir bijusi uz “vieglākā” kausa un ir vieglāka nekā citas monētas.

(B) Ja kausi ir līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta palikusi malā (skat. 6. att. (B)). Otrajā svēršanā salīdzinām malā palikušās 9 monētas ar jebkurām 9 jau svērtajām (parastajām) monētām.

- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz leju, tad atšķirīgā monēta ir vieglāka nekā pārējās.
- Ja svaru kauss ar 9 parastajām monētām nosveras uz augšu, tad atšķirīgā monēta ir smagāka nekā pārējās.



6. att.

5. uzdevums

Ir trīs dažādas masas pakas un sviras sviri bez atsvariem. Vai vienmēr ar divām svēršanām var sakārtot paku masas pieaugošā secībā?

5. uzdevums

Atrisinājums. Ne vienmēr, jo dažādu svēršanas iznākumu skaits ir $2 \cdot 2 = 4$ (vienādība nav iespējama, jo visas pakas ir ar dažādu masu), bet to izkārtojumu pēc masas ir $3! = 6$.

Grūtāki uzdevumi

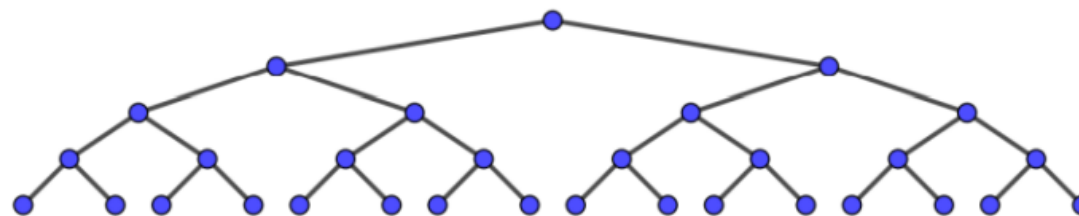
6. uzdevums

Doti 16 akmeņi ar dažādām masām. Pierādiet, ka ar 18 svēršanām uz sviru svariem bez atsvariem var atrast pašu smagāko un otru smagāko akmeni!

6. uzdevums

Atrisinājums. Lai atrastu vissmagāko akmeni, ir nepieciešamas 15 svēršanas – rīkojamies pēc klasiskās olimpiskās shēmas, tas ir, sākumā sadalām visus akmeņus pāros un katrā pāri atrodam smagāko akmeni (8 svēršanas), tad šos 8 atrastos akmeņus sadalām četros pāros un katrā no tiem atrodam smagāko akmeni (4 svēršanas), pēc tam atrastos četrus akmeņus sadalām divos pāros un katrā pāri atrodam smagāko akmeni (2 svēršanas), visbeidzot salīdzinām pēdējos divus akmeņus (1 svēršana) (skat. 10. att.). Tātad ar 15 svēršanām jau esam atraduši pašu smagāko akmeni. Vēl jāatrod otrs smagākais akmens.

Otrs smagākais akmens var būt tikai kāds no tiem četriem akmeņiem, kas tika salīdzināts ar pašu smagāko akmeni. Smagākais akmens no četriem akmeņiem atrodams ar 3 svēršanām, piemēram, salīdzinām divus akmeņus (1 svēršana), smagāko atstājam svaros un to salīdzinām ar vienu no nesvērtajiem akmeņiem (1 svēršana), atkal svaros atstājot smagāko, tad šo pašu darbību atkārtojam vēlreiz (1 svēršana). Tas nozīmē, ka ar $15 + 3 = 18$ svēršanām var atrast pašu smagāko un otro smagāko akmeni no 16 akmeņu kaudzes.



10. att.

7. uzdevums

Dotas piecas pēc ārēja izskata vienādas bumbas, kuru masas ir 1000 g, 1001 g, 1002 g, 1004 g un 1007 g. Doti arī elektroniskie svāri, kas rāda masu gramos. Kā ar trīs svēršanām atrast bumbu, kuras masa ir 1000 g?

7. uzdevums

Atrisinājums. Pirmajā svēršanā uz svariem liekam divas bumbas un noskaidrojam to kopējo masu. Otrajā svēršanā uz svariem liekam citas divas, vēl nesvērtas bumbas. Katrā no šīm divām svēršanām iegūstam vienu no tabulā parādītajiem svaru rādījumiem.

$2001 = 1000 + 1001$	$2006 = 1002 + 1004$
$2002 = 1000 + 1002$	$2007 = 1000 + 1007$
$2003 = 1001 + 1002$	$2008 = 1001 + 1007$
$2004 = 1000 + 1004$	$2009 = 1002 + 1007$
$2005 = 1001 + 1004$	$2011 = 1004 + 1007$

- Ja abās svēršanās nav iegūts neviens no izceltajiem rezultātiem, tad 1000 g bumba ir tā, kas netika svērtā.
- Ja vienā no svēršanām ir iegūts kāds no izceltajiem rezultātiem, tad tas nozīmē, ka 1000 g bumba atrodas attiecīgajā pāri. Trešajā svēršanā nosveram vienu no šī pāra bumbām. Ja svari rāda 1000 g, tad meklētā bumba ir uz svariem, ja citu skaitli, tad 1000 g bumba ir otra šī pāra bumba.

8. uzdevums

Dotas četras pēc ārēja izskata vienādas monētas, kuru masas ir 1 g, 2 g, 3 g un 4 g. Kā ar četrām svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem noskaidrot katras monētas masu?

8. uzdevums

Atrisinājums. Vispirms uz katra svaru kausa uzliekam pa 2 monētām (1 svēršana).

- Ja pirmajā svēršanā svari atrodas līdzsvarā, tad šādu svaru stāvokli izsaka tikai vienādība $1 + 4 = 2 + 3$. Ar divām svēršanām nosakām abas smagākās monētas pāros (1; 4) un (2; 3). Ceturtajā svēršanā salīdzinām šīs smagākās monētas savā starpā, tas ir, noskaidrojam, kura no monētām ir 3 g, kura – 4 g. Monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 4 g monētu, sver 1 g, bet tā monēta, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa ar 3 g monētu, sver 2 g.
- Ja pirmajā svēršanā svari nav līdzsvarā, tad ir divas iespējas: vai nu $1 + 2 < 3 + 4$, vai $1 + 3 < 2 + 4$. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no smagākā pāra – smagākā no tām ir 4 g. Trešajā svēršanā salīdzina vieglākā pāra monētas – vieglākā no tām ir 1 g. Ceturtajā svēršanā salīdzina atlikušās divas monētas: vieglākā no tām ir 2 g, bet smagākā – 3 g.

9. uzdevums

Pa apli izvietotas 10 dzelzs monētas. Starp katrām divām blakus esošām monētām atrodas bronzas lodīte, kuras masa ir vienāda ar abu blakus esošo monētu masu starpību. Pierādiet, ka lodītes var sadalīt uz diviem svaru kausiem tā, lai svāri būtu līdzsvarā.

9. uzdevums

Atrisinājums. Apzīmēsim monētu masas ar m_i , bet lodīšu masas ar x_i .

Tad $(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \dots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0$.
Ievērosim, ka absolūtās vērtības izteiksmēm iekavās ir vienādas ar lodīšu masām. Pārnesot visas negatīvās vērtības uz labo pusi ar pretēju zīmi, iegūstam $x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{10}$.

10. uzdevums

Četru pēc ārējā izskata vienādu monētu masas veido ģeometrisku progresiju, kas nav konstanta. Atrast smagāko monētu, veicot divas svēršanas uz sviru svariem bez atsvariem!

10. uzdevums

Atrisinājums. Apzīmējam monētu masas ar a, aq, aq^2, aq^3 , kur $q > 1$. Pirmajā svēršanā uz katra svaru kausa novietojam divas monētas. Pamatosim, ka smagākā monēta noteikti atradīsies kausā, kas nosveras uz leju. Iespējami trīs gadījumi:

- $aq^3 + aq^2 > aq + a$, jo $aq^3 > aq$ un $aq^2 > a$;
- $aq^3 + aq > aq^2 + a$, jo $aq^3 > aq^2$ un $aq > a$;
- $aq^3 + a > aq + aq^2$, jo, ekvivalenti pārveidojot, iegūstam patiesu nevienādību $q^3 - q^2 - q + 1 > 0$ jeb $(q + 1)(q - 1)^2 > 0$.

Tātad esam pamatojuši, ka smagākā monēta atrodas tajā kausā, kas nosveras uz leju. Otrajā svēršanā salīdzinām abas monētas no šī kausa un atrodam smagāko. Līdz ar to ar divām svēršanām esam atraduši smagāko monētu.