

9. klase

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

“Kāds var būt...?”; “Cik...?”

Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:

1. uzrakstīti **visi** iespējamie gadījumi, kam prasības izpildās;
2. **pierādīts**, ka citu iespēju nav.

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība

“Kāds lielākais (mazākais)...?”

Uzdevuma risinājumam jāsatvērs no divām daļām:

1. **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2. **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai var...?”; “Vai iespējams...?”; “Vai eksistē...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- “nē”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet: **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai visiem...?”; “Vai vienmēr...?”; “Vai noteikti...?”; “Vai katram...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
- “nē”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

4. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

5. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?
6. Kāds mazākais ciparu skaits jāieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?
7. Dota 3×3 rūtiņu tabula. Vai iespējams katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība nepārsniegtu: **a)** 2; **b)** 3?
8. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 30 vienas klases skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Vai noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu?

9. klase

Atrisinājumi

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Atrisinājums. Skaitļa n dalītāju apzīmēsim ar d , tad $n - 4d = 11$. Tā kā d ir skaitļa n dalītājs, tad $n = k \cdot d$ un iegūstam, ka $kd - 4d = 11$ jeb $d(k - 4) = 11$. Tas nozīmē, ka 11 dalās ar d . Skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tāpēc iespējami divi gadījumi:

- $d = 1$ un $k - 4 = 11$ jeb $k = 15$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 15 \cdot 1 = 15$;
- $d = 11$ un $k - 4 = 1$ jeb $k = 5$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 5 \cdot 11 = 55$.

Tātad Māris iedomājās vai nu skaitli 15, vai 55.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Atrisinājums. Pamatotsim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem, ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklējam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

3. Vai iespējams uzzīmēt tādu taisnstūri, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, bet: **a)** laukums ir pirmskaitlis; **b)** perimetrs ir pirmskaitlis?

Atrisinājums. **a)** Jā, piemēram, der taisnstūris ar malu garumiem 1 un 3, tad laukums ir 3, kas ir pirmskaitlis.

b) Nē, nav iespējams. Ja taisnstūra malu garumi ir a un b , tad taisnstūra perimetrs ir $P = 2 \cdot (a + b)$. Perimetrs vienmēr ir pāra skaitlis. Vienīgais pāra pirmskaitlis ir 2, tāpēc $a + b$ būtu jābūt vienādam ar 1, bet tas nav iespējams, jo a un b ir naturāli skaitļi.

4. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

Atrisinājums. Nē, piemēram, 123456790 nedalās ar 3, jo tā ciparu summa $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 = 37$ nedalās ar 3.

5. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

Atrisinājums. Trijstūra sānu malas garumu apzīmējam ar x . Tad no dotā iegūstam, ka jāizpildās nevienādībai

$$10 + x + x < 30,$$

$$2x < 20,$$

$$x < 10.$$

Trijstūris eksistē tad un tikai tad, ja izpildās trijstūra nevienādība, tas ir, $x + 10 > x$ (patiesa visām x vērtībām) un $x + x > 10$ jeb $x > 5$. Līdz ar to $x \in (5; 10)$ jeb trijstūra sānu malas garums ir lielāks nekā 5 cm un mazāks nekā 10 cm.

6. Kāds mazākais ciparu skaits jāieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?

Atrisinājums. 1. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk nekā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $17 \cdot 2019 = 34323 < \overline{3456x}$ un $18 \cdot 2019 = 36342 > \overline{3456x}$, kur x – cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi $171 \cdot 2019 = 345249 < \overline{3456xy}$ un $172 \cdot 2019 = 347268 > \overline{3456xy}$, kur x un y – cipari. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Tātad esam pierādījuši, ka jāpievieno vismaz trīs cipari.

2. atrisinājums. Mazākais ciparu skaits, kas jāieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk nekā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $\overline{3456x} = 34560 + x = 17 \cdot 2019 + 237 + x$, kur x – viencipara skaitlis. Tā kā $17 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456x}$ dalītos ar 2019, arī $(237 + x)$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo x ir viencipara skaitlis. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi apskatām skaitli $\overline{3456xy} = 345600 + \overline{xy} = 171 \cdot 2019 + 351 + \overline{xy}$, kur x un y – cipari. Tā kā $171 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456xy}$ dalītos ar 2019, arī $(351 + \overline{xy})$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo $\overline{xy}$ ir divciparu skaitlis. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Piezīme. Atrast meklēto skaitli palīdz līdzīgi spriedumi, tas ir, $3456000 = 1711 \cdot 2019 + 1491$ un $1491 + 528 = 2019$.

7. Dota 3×3 rūtiņu tabula. Vai iespējams katrā rūtiņā ierakstīt naturālu skaitli no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstīto skaitļu starpība nepārsniegtu: **a)** 2; **b)** 3?

Atrisinājums. a) Pamatotsim, ka prasītais nav iespējams.

Ja prasītais būtu iespējams, tad skaitlim 1 blakus rūtiņās (rūtiņās, kurām ir kopīga mala) varētu atrasties tikai skaitļi 2 un 3. Tas nozīmētu, ka skaitlim 1 jāatrodas kādā no stūra rūtiņām (piemēram, skat. 1. att.), jo visās citām rūtiņām ir vairāk nekā divas rūtiņas, ar kurām tām ir kopīga mala. Vienīgie skaitļi, kas varētu atrasties skaitlim 2 blakus rūtiņās, ir 1, 3 un 4. Taču, tā kā skaitļi 1 un 3 jau ir ierakstīti tabulā, tad nevar aizpildīt abas ar 3 atzīmētās rūtiņas. Līdz ar to esam pamatojuši, ka prasītais nav iespējams.

1	2	
3		
	3	3

1. att.

b) Jā, piemēram, skat. 2. att.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2. att.

8. Skolas ēdnīcas pusdienu piedāvājumā ir divas dažādas zupas, divi dažādi pamatēdieni un divi dažādi deserti. Pusdienās aizgāja 30 vienas klases skolēni, no katra ēdienu veida (zupa, pamatēdiens, deserts) katrs skolēns izvēlējās ne vairāk kā vienu ēdienu, pie tam nebija tāda skolēna, kurš neēda vispār neko. Vai noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu?

Atrisinājums. Pamatosim, ka noteikti ir divi tādi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu. Ievērojam, ka katra veida ēdienu var vai nu neiekļaut komplektā, vai izvēlēties vienu no diviem tā veidiem, tātad katram ēdiena veidam ir 3 dažādas iespējas. Tā kā katrs skolēns izvēlējās vismaz vienu no piedāvātajiem ēdieniem (neder variants, ka no katra ēdiena veida neizvēlas neko), tad ir iespējams izveidot $3 \cdot 3 \cdot 3 - 1 = 26$ dažādus pusdienu komplektus.

Ja katru no šiem komplektiem būtu izvēlēties ne vairāk kā viens skolēns, tad pusdienās būtu aizgājuši ne vairāk kā 26 skolēni, kas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem. Tātad noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

Piezīme. Teknrakstā izceltā teksta vietā var būt, piemēram, arī šāds spriedums: tā kā pusdienās aizgāja 30 skolēni un $30 > 26$, tad pēc Dirihlē principa noteikti ir divi skolēni, kas pasūtīja vienu un to pašu.

10. klase

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

“Kāds var būt...?”; “Cik...?”

Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:

1. uzrakstīti **visi** iespējamie gadījumi, kam prasības izpildās;
2. **pierādīts**, ka citu iespēju nav.

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība

“Kāds lielākais (mazākais)...?”

Uzdevuma risinājumam jāsatāv no divām daļām:

1. **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2. **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai var...?”; “Vai iespējams...?”; “Vai eksistē...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- “nē”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2025; **b)** 2026?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai visiem...?”; “Vai vienmēr...?”; “Vai noteikti...?”; “Vai katram...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
- “nē”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

4. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

5. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?
6. Kāds mazākais ciparu skaits jāieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?
7. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisku progresiju?
8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

10. klase

Atrisinājumi

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Atrisinājums. Skaitļa n dalītāju apzīmēsim ar d , tad $n - 4d = 11$. Tā kā d ir skaitļa n dalītājs, tad $n = k \cdot d$ un iegūstam, ka $kd - 4d = 11$ jeb $d(k - 4) = 11$. Tas nozīmē, ka 11 dalās ar d . Skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tāpēc iespējami divi gadījumi:

- $d = 1$ un $k - 4 = 11$ jeb $k = 15$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 15 \cdot 1 = 15$;
- $d = 11$ un $k - 4 = 1$ jeb $k = 5$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 5 \cdot 11 = 55$.

Tātad Māris iedomājās vai nu skaitli 15, vai 55.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Atrisinājums. Pamatotsim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem, ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklējam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

3. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2025; **b)** 2026?

Atrisinājums. **a)** Jā, var, šie pieci skaitļi ir

$$403, \quad 404, \quad 405, \quad 406, \quad 407.$$

b) Nē, nevar būt. Apzīmējam piecus secīgus skaitļus ar

$$n - 2, \quad n - 1, \quad n, \quad n + 1, \quad n + 2.$$

Šo skaitļu summa ir

$$(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 5n.$$

Tā kā 2026 nedalās ar 5, tad piecu secīgu skaitļu summa nevar būt 2026.

4. Vai noteikti deviņciparu skaitlis, kura pierakstā izmantoti deviņi atšķirīgi cipari, dalās ar 3?

Atrisinājums. Nē, piemēram, 123456790 nedalās ar 3, jo tā ciparu summa $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 + 0 = 37$ nedalās ar 3.

5. Vienādsānu trijstūra pamata malas garums ir 10 cm, bet perimetrs ir mazāks nekā 30 cm. Kāds var būt trijstūra sānu malas garums?

Atrisinājums. Trijstūra sānu malas garumu apzīmējam ar x . Tad no dotā iegūstam, ka jāizpildās nevienādībai

$$10 + x + x < 30,$$

$$2x < 20,$$

$$x < 10.$$

Trijstūris eksistē tad un tikai tad, ja izpildās trijstūra nevienādība, tas ir, $x + 10 > x$ (patiesa visām x vērtībām) un $x + x > 10$ jeb $x > 5$. Līdz ar to $x \in (5; 10)$ jeb trijstūra sānu malas garums ir lielāks nekā 5 cm un mazāks nekā 10 cm.

6. Kāds mazākais ciparu skaits jāieraksta ciparu virknes 3456 beigās, lai iegūtu skaitli, kas dalās ar 2019?

Atrisinājums. 1. **atrisinājums.** Mazākais ciparu skaits, kas jāieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk nekā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $17 \cdot 2019 = 34323 < \overline{3456x}$ un $18 \cdot 2019 = 36342 > \overline{3456x}$, kur x – cipars. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi $171 \cdot 2019 = 345249 < \overline{3456xy}$ un $172 \cdot 2019 = 347268 > \overline{3456xy}$, kur x un y – cipari. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Tātad esam pierādījuši, ka jāpievieno vismaz trīs cipari.

2. **atrisinājums.** Mazākais ciparu skaits, kas jāieraksta ciparu virknes beigās, ir trīs. Piemēram, skaitlis 3456528 dalās ar 2019 ($3456528 = 2019 \cdot 1712$).

Pierādīsim, ka mazāk nekā trīs ciparus nevar pierakstīt dotās ciparu virknes beigās, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi.

Skaitlis 3456 nedalās ar 2019, tāpēc dotās virknes beigās ir jāieraksta vismaz viens cipars.

Ievērojam, ka $\overline{3456x} = 34560 + x = 17 \cdot 2019 + 237 + x$, kur x – viencipara skaitlis. Tā kā $17 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456x}$ dalītos ar 2019, arī $(237 + x)$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo x ir viencipara skaitlis. Līdz ar to ar viena cipara pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Līdzīgi apskatām skaitli $\overline{3456xy} = 345600 + \overline{xy} = 171 \cdot 2019 + 351 + \overline{xy}$, kur x un y – cipari. Tā kā $171 \cdot 2019$ dalās ar 2019, tad, lai $\overline{3456xy}$ dalītos ar 2019, arī $(351 + \overline{xy})$ jādalās ar 2019, bet tas nav iespējams, jo $\overline{xy}$ ir divciparu skaitlis. Līdz ar to ar divu ciparu pievienošanu nevar izveidot skaitli, kas dalās ar 2019.

Piezīme. Atrast meklēto skaitli palīdz līdzīgi spriedumi, tas ir, $3456000 = 1711 \cdot 2019 + 1491$ un $1491 + 528 = 2019$.

7. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisku progresiju?

Atrisinājums. Jā, eksistē, piemēram, trijstūris ar malu garumiem 4, 6 un 9, jo šie skaitļi apmierina trijstūra nevienādību:

$$4 + 6 > 9, \quad 4 + 9 > 6, \quad 6 + 9 > 4,$$

un tie veido ģeometrisku progresiju, kuras pirmais loceklis ir 4 un kvocients 1,5.

8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

Atrisinājums. Jā, Makss prasīto vienmēr var panākt. Aplūkosim vienādojumu

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0.$$

Ievietojot $x = -1$, iegūstam:

$$a + b + c + d + e = 0.$$

Tātad, ja

$$a + b + c + d + e = 0,$$

tad $x = -1$ ir šī vienādojuma sakne. Līdz ar to Makss pēdējais skaitlis ir jāizvēlas tāds, lai visu piecu skaitļu summa būtu 0, jo tad, lai kā Morics tos ierakstītu tukšajos kvadrātos, vienādojumam noteikti būs vismaz viena vesela sakne $x = -1$.

11. klase

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

“Kāds var būt...?”; “Cik...?”

Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:

1. uzrakstīti **visi** iespējamie gadījumi, kam prasības izpildās;
2. **pierādīts**, ka citu iespēju nav.

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība

“Kāds lielākais (mazākais)...?”

Uzdevuma risinājumam jāsatāv no divām daļām:

1. **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2. **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai var...?”; “Vai iespējams...?”; “Vai eksistē...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- “nē”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2025; **b)** 2026?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai visiem...?”; “Vai vienmēr...?”; “Vai noteikti...?”; “Vai katram...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
- “nē”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

4. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi. Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

5. Regulāras piecstūra plāksnītes virsotnēs pa vienai reizei uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5. Divas šādas plāksnītes sauksim par dažādām, ja, pagriežot vai apmetot vienu plāksnīti otrādi, nevar panākt, ka visi vienas plāksnītes virsotnēs uzrakstītie skaitļi sakrīt ar otras plāksnītes virsotnēs uzrakstītajiem skaitļiem. Cik dažādas plāksnītes var izveidot?
6. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?
7. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisku progresiju?
8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

11. klase

Atrisinājumi

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Atrisinājums. Skaitļa n dalītāju apzīmēsim ar d , tad $n - 4d = 11$. Tā kā d ir skaitļa n dalītājs, tad $n = k \cdot d$ un iegūstam, ka $kd - 4d = 11$ jeb $d(k - 4) = 11$. Tas nozīmē, ka 11 dalās ar d . Skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tāpēc iespējami divi gadījumi:

- $d = 1$ un $k - 4 = 11$ jeb $k = 15$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 15 \cdot 1 = 15$;
- $d = 11$ un $k - 4 = 1$ jeb $k = 5$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 5 \cdot 11 = 55$.

Tātad Māris iedomājās vai nu skaitli 15, vai 55.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Atrisinājums. Pamatotsim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem, ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklējam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

3. Vai piecu secīgu veselu skaitļu summa var būt: **a)** 2025; **b)** 2026?

Atrisinājums. **a)** Jā, var, šie pieci skaitļi ir

$$403, \quad 404, \quad 405, \quad 406, \quad 407.$$

b) Nē, nevar būt. Apzīmējam piecus secīgus skaitļus ar

$$n - 2, \quad n - 1, \quad n, \quad n + 1, \quad n + 2.$$

Šo skaitļu summa ir

$$(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 5n.$$

Tā kā 2026 nedalās ar 5, tad piecu secīgu skaitļu summa nevar būt 2026.

4. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi. Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Jā, var. Aprakstīsim, kā jārikojas otrajam spēlētājam. Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem:

$$(1; 2), \quad (3; 4), \quad \dots, \quad (2021; 2022).$$

Ja pirmais spēlētājs izdzēs kādu skaitli, tad otrais spēlētājs izdzēs to skaitli, kas ir vienā pāri ar pirmā spēlētāja izdzēsto skaitli. Tā spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr izjauc pirmā spēlētāja nodomu, jo beigās paliks divi skaitļi no viena pāra, kas atšķiras par 1, bet šādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

5. Regulāras piecstūra plāksnītes virsotnēs pa vienai reizei uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5. Divas šādas plāksnītes sauksim par dažādām, ja, pagriežot vai apmetot vienu plāksnīti otrādi, nevar panākt, ka visi vienas plāksnītes virsotnēs uzrakstītie skaitļi sakrīt ar otras plāksnītes virsotnēs uzrakstītajiem skaitļiem. Cik dažādas plāksnītes var izveidot?

Atrisinājums. 1. **atrisinājums.** Ņemot vērā, ka plāksnītes var brīvi pagriezt vai apmest otrādi, varam uzskatīt, ka 1 vienmēr atrodas fiksētā vietā, kā arī skaitlis a , kas atrodas pa kreisi no šīs virsotnes, ir mazāks nekā skaitlis b , kas atrodas pa labi no šīs virsotnes.

Katrai šādai skaitļu kombinācijai $a \sim 1 \sim b$ var izveidot divas dažādas plāksnītes, attiecīgi atlikušajās virsotnēs ierakstot divus vēl neizmantotos skaitļus. Tā kā pavisam ir seši iespējamie a un b pāri:

$$2 \sim 3, \quad 2 \sim 4, \quad 2 \sim 5, \quad 3 \sim 4, \quad 3 \sim 5 \quad \text{un} \quad 4 \sim 5,$$

tad pavisam var izveidot

$$6 \cdot 2 = 12$$

dažādas plāksnītes.

2. **atrisinājums.** Izvietojot skaitļus pilnīgi patvaļīgi, var iegūt

$$5! = 120$$

plāksnītes. Tā kā plāksnītes drīkst brīvi grozīt, tad dažādo variantu skaits ir 5 reizes mazāks, tas ir:

$$120 : 5 = 24.$$

Šajā skaitā ir ieskaitīta arī katras plāksnītes apgrieztā plāksnīte (spoguļattēls), tādēļ pavisam ir

$$24 : 2 = 12$$

dažādas plāksnītes.

6. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?

Atrisinājums. Lielākais no šiem skaitļiem var būt 13, tad skaitļi var būt izvietoti, piemēram, kā parādīts 1. att.

$$\begin{array}{cc} 13 & 9 \\ 9 & 10 \\ 10 & 10 \\ 10 & 9 \\ 9 & 11 \end{array}$$

1. att.

Pierādīsim, ka lielākais skaitlis nevar būt lielāks par 13. Apzīmējam lielāko skaitli ar a un pārējos 9 skaitļus sadalām trīs trijniekos. Skaitļu summa katrā trijniekā ir vismaz 29, tāpēc

$$a \leq 100 - 3 \cdot 29 = 13.$$

Tātad lielākais no šiem desmit skaitļiem var būt ne vairāk kā 13, un piemērs parāda, ka šī vērtība ir sasniedzama. Tāpēc atbilde ir

$$\boxed{13}.$$

7. Vai eksistē tāds dažādmalu trijstūris, kura malu garumi ir naturāli skaitļi, kas veido ģeometrisku progresiju?

Atrisinājums. Jā, eksistē, piemēram, trijstūris ar malu garumiem 4, 6 un 9, jo šie skaitļi apmierina trijstūra nevienādību:

$$4 + 6 > 9, \quad 4 + 9 > 6, \quad 6 + 9 > 4,$$

un tie veido ģeometrisku progresiju, kuras pirmais loceklis ir 4 un kvocients 1,5.

8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

Atrisinājums. Jā, Makss prasīto vienmēr var panākt. Aplūkosim vienādojumu

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0.$$

Ievietojot $x = -1$, iegūstam:

$$a + b + c + d + e = 0.$$

Tātad, ja

$$a + b + c + d + e = 0,$$

tad $x = -1$ ir šī vienādojuma sakne. Līdz ar to Makss pēdējais skaitlis ir jāizvēlas tāds, lai visu piecu skaitļu summa būtu 0, jo tad, lai kā Morics tos ierakstītu tukšajos kvadrātos, vienādojumam noteikti būs vismaz viena vesela sakne $x = -1$.

12. klase

Uzdevumi, kuros jāatrod visas iespējamās vērtības

“Kāds var būt...?”; “Cik...?”

Uzdevuma risinājumā jābūt divām daļām:

1. uzrakstīti **visi** iespējamie gadījumi, kam prasības izpildās;
2. **pierādīts**, ka citu iespēju nav.

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Uzdevumi, kuros jāatrod vai nu vislielākā, vai vismazākā vērtība

“Kāds lielākais (mazākais)...?”

Uzdevuma risinājumam jāsatāv no divām daļām:

1. **jāatrod** vislielākā (vismazākā) vērtība un jāparāda piemērs, kurā izpildās visas prasības;
2. **jāpierāda**, ka vēl lielāka (mazāka) vērtība nevar būt.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai var...?”; “Vai iespējams...?”; “Vai eksistē...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad pietiek uzrādīt **vienu piemēru**, kurā visas uzdevuma prasības izpildās;
- “nē”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem.

3. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}.$$

Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitļus

$$\frac{b^2}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a^2}{b}.$$

Vai, izdarot vairākus šādus gājienus, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti skaitļi

$$\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{2}?$$

Uzdevumi, kuros uz jautājumu jāatbild ar “jā” vai “nē” un jāpamato sava atbilde

“Vai visiem...?”; “Vai vienmēr...?”; “Vai noteikti...?”; “Vai katram...?”

Ja atbilde ir:

- “jā”, tad nepieciešams **pierādījums**, kas balstās uz vispārīgiem spriedumiem;
- “nē”, tad pietiek uzrādīt vienu **pretpiemēru**.

4. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi. Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?

Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

5. Regulāras piecstūra plāksnītes virsotnēs pa vienai reizei uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5. Divas šādas plāksnītes sauksim par dažādām, ja, pagriežot vai apmetot vienu plāksnīti otrādi, nevar panākt, ka visi vienas plāksnītes virsotnēs uzrakstītie skaitļi sakrīt ar otras plāksnītes virsotnēs uzrakstītajiem skaitļiem. Cik dažādas plāksnītes var izveidot?
6. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?
7. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N , katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k , atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 4$; **b)** $N = 5$?
8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

12. klase

Atrisinājumi

1. Māris iedomājās naturālu skaitli n . Pēc tam viņš izvēlējās vienu skaitļa n dalītāju, pareizināja to ar 4 un iegūto reizinājumu atņēma no dotā skaitļa n , iegūstot vērtību 11. Kādu skaitli varēja iedomāties Māris?

Atrisinājums. Skaitļa n dalītāju apzīmēsim ar d , tad $n - 4d = 11$. Tā kā d ir skaitļa n dalītājs, tad $n = k \cdot d$ un iegūstam, ka $kd - 4d = 11$ jeb $d(k - 4) = 11$. Tas nozīmē, ka 11 dalās ar d . Skaitlis 11 ir pirmskaitlis, tāpēc iespējami divi gadījumi:

- $d = 1$ un $k - 4 = 11$ jeb $k = 15$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 15 \cdot 1 = 15$;
- $d = 11$ un $k - 4 = 1$ jeb $k = 5$, no kā iegūstam, ka $n = k \cdot d = 5 \cdot 11 = 55$.

Tātad Māris iedomājās vai nu skaitli 15, vai 55.

2. Kāds ir mazākais naturālais skaitlis, kura pierakstā izmantoti tikai cipari 0 un 2 un kurš dalās ar 15?

Atrisinājums. Pamatosim, ka mazākais skaitlis, kas atbilst nosacījumiem, ir 2220. Lai skaitlis dalītos ar 15, tam jādalās gan ar 3, gan ar 5. Lai skaitlis dalītos ar 3, tā ciparu summai jādalās ar 3. Tātad ciparam 2 šajā skaitlī jāparādās vismaz 3 reizes. Lai uzdevumā aprakstītais skaitlis dalītos ar 5, tā pēdējam ciparam jābūt 0. Līdz ar to meklējam skaitlim ir vismaz 4 cipari un šis skaitlis ir 2220.

3. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}.$$

Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), tos nodzēst un vietā uzrakstīt skaitļus

$$\frac{b^2}{a} \quad \text{un} \quad \frac{a^2}{b}.$$

Vai, izdarot vairākus šādus gājienu, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti skaitļi

$$\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{2}?$$

Atrisinājums. Nē, nevar. Izdarot gājienu, uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums nemainās, tas ir, ja uz tāfeles pirms gājiena izdarīšanas ir uzrakstīti skaitļi a, b, c , tad to reizinājums ir $a \cdot b \cdot c$, un pēc gājiena izdarīšanas uz tāfeles uzrakstīto skaitļu reizinājums ir

$$\frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot c = a \cdot b \cdot c.$$

Tā kā sākumā uzrakstīto skaitļu reizinājums ir

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = 2,$$

bet skaitļu

$$\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{2}$$

reizinājums ir

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{8}{3},$$

tad prasītais nav iespējams.

4. Rindā uzrakstīti skaitļi no 1 līdz 2022 (ieskaitot). Divi spēlētāji pēc kārtas ņem pa vienam skaitlim no rindas tik ilgi, kamēr rindā paliek tikai divi skaitļi. Pirmais spēlētājs (tas spēlētājs, kurš sāk spēli) uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir lielāks nekā 1, bet otrais spēlētājs uzvar, ja divu beigās palikušo skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1. Vai otrais spēlētājs, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt?

Atrisinājums. Jā, var. Aprakstīsim, kā jārikojas otrajam spēlētājam. Otrais spēlētājs domās sadala skaitļus pa pāriem:

$$(1; 2), \quad (3; 4), \quad \dots, \quad (2021; 2022).$$

Ja pirmais spēlētājs izdzēs kādu skaitli, tad otrais spēlētājs izdzēs to skaitli, kas ir vienā pāri ar pirmā spēlētāja izdzēsto skaitli. Tā spēlējot, otrais spēlētājs vienmēr izjauc pirmā spēlētāja nodomu, jo beigās paliks divi skaitļi no viena pāra, kas atšķiras par 1, bet šādu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir 1.

5. Regulāras piecstūra plāksnītes virsotnēs pa vienai reizei uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4 un 5. Divas šādas plāksnītes sauksim par dažādām, ja, pagriežot vai apmetot vienu plāksnīti otrādi, nevar panākt, ka visi vienas plāksnītes virsotnēs uzrakstītie skaitļi sakrīt ar otras plāksnītes virsotnēs uzrakstītajiem skaitļiem. Cik dažādas plāksnītes var izveidot?

Atrisinājums. 1. atrisinājums. Ņemot vērā, ka plāksnītes var brīvi pagriezt vai apmest otrādi, varam uzskatīt, ka 1 vienmēr atrodas fiksētā vietā, kā arī skaitlis a , kas atrodas pa kreisi no šīs virsotnes, ir mazāks nekā skaitlis b , kas atrodas pa labi no šīs virsotnes.

Katrai šāda skaitļu kombinācijai $a \sim 1 \sim b$ var izveidot divas dažādas plāksnītes, attiecīgi atlikušajās virsotnēs ierakstot divus vēl neizmantotos skaitļus. Tā kā pavisam ir seši iespējamie a un b pāri:

$$2 \sim 3, \quad 2 \sim 4, \quad 2 \sim 5, \quad 3 \sim 4, \quad 3 \sim 5 \quad \text{un} \quad 4 \sim 5,$$

tad pavisam var izveidot

$$6 \cdot 2 = 12$$

dažādas plāksnītes.

2. atrisinājums. Izvietojot skaitļus pilnīgi patvaļīgi, var iegūt

$$5! = 120$$

plāksnītes. Tā kā plāksnītes drīkst brīvi grozīt, tad dažādo variantu skaits ir 5 reizes mazāks, tas ir:

$$120 : 5 = 24.$$

Šajā skaitā ir ieskaitīta arī katras plāksnītes apgrieztā plāksnīte (spoguļattēls), tādēļ pavisam ir

$$24 : 2 = 12$$

dažādas plāksnītes.

6. Pa apli uzrakstīti 10 naturāli skaitļi, kuru summa ir 100. Zināms, ka jebkuru trīs pēc kārtas esošu skaitļu summa ir vismaz 29. Kādu lielāko vērtību var pieņemt lielākais no šiem desmit skaitļiem?

Atrisinājums. Lielākais no šiem skaitļiem var būt 13, tad skaitļi var būt izvietoti, piemēram, kā parādīts 1. att.

$$\begin{array}{cc} 13 & 9 \\ 9 & 10 \\ 10 & 10 \\ 10 & 9 \\ 9 & 11 \end{array}$$

1. att.

Pierādīsim, ka lielākais skaitlis nevar būt lielāks par 13. Apzīmējam lielāko skaitli ar a un pārējos 9 skaitļus sadalām trīs trijniekos. Skaitļu summa katrā trijniekā ir vismaz 29, tāpēc

$$a \leq 100 - 3 \cdot 29 = 13.$$

Tātad lielākais no šiem desmit skaitļiem var būt ne vairāk kā 13, un piemērs parāda, ka šī vērtība ir sasniedzama. Tāpēc atbilde ir

$$\boxed{13}.$$

7. Uz katras no $2N$ kartītēm uzrakstīts viens naturāls skaitlis no 1 līdz N , katrs skaitlis uzrakstīts uz tieši divām kartītēm. Kartītes jāsaliek rindā vienu aiz otras tā, lai starp kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis k , atrastos tieši k citas kartītes. Vai kartītes var salikt prasītajā veidā, ja **a)** $N = 4$; **b)** $N = 5$?

Atrisinājums. **a)** Jā, kartītes var salikt, piemēram, šādā secībā:

$$4, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2.$$

b) Pieņemsim, ka ir izdevies salikt kartītes rindā tā, kā prasīts. Sanumurēsim tās pēc kārtas ar naturālajiem skaitļiem no 1 līdz 10. Parādīsim, ka ir pāra skaits kartīšu, kas atrodas vietās ar pāra numuriem. No divām kartītēm, uz kurām uzrakstīts skaitlis 2, viena atrodas vietā ar pāra numuru, otra – vietā ar nepāra numuru. Tas ir spēkā arī kartītēm, uz kurām rakstīts 4. Tātad no šīm četrām kartītēm divas atrodas vietās ar pāra numuru, bet otras divas – vietās ar nepāra numuru.

Abas kartītes, uz kurām ir rakstīts viens un tas pats nepāra skaitlis (1, 3 vai 5), atrodas vietās, kuru numuriem ir vienāda paritāte (tas ir, abi ir pāra vai abi nepāra), tātad tās izmaina pāra vietās esošo kartīšu skaitu par pāra skaitli (0 vai 2). Redzam, ka kopā vietās ar pāra numuriem atrodas pāra skaits kartīšu (tāpat arī vietās ar nepāra numuriem).

Bet pavisam ir 5 vietas ar pāra numuriem un 5 vietas ar nepāra numuriem, iegūta pretruna, tātad prasīto izdarīt nevar.

8. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums $\square x^4 - \square x^3 + \square x^2 - \square x + \square = 0$. Makss un Morics spēlē spēli: Makss nosauc vienu reālu skaitli, tad Morics nosauc otru, tad Makss nosauc trešo, Morics – ceturto un visbeidzot Makss – piekto. Pēc tam Morics kaut kādā secībā ieraksta šos skaitļus tukšajos kvadrātos. Vai Makss vienmēr var panākt, lai iegūtajam vienādojumam ir vismaz viena vesela sakne?

Atrisinājums. Jā, Makss prasīto vienmēr var panākt. Aplūkosim vienādojumu

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0.$$

Ievietojot $x = -1$, iegūstam:

$$a + b + c + d + e = 0.$$

Tātad, ja

$$a + b + c + d + e = 0,$$

tad $x = -1$ ir šī vienādojuma sakne. Līdz ar to Makss pēdējais skaitlis ir jāizvēlas tāds, lai visu piecu skaitļu summa būtu 0, jo tad, lai kā Morics tos ierakstītu tukšajos kvadrātos, vienādojumam noteikti būs vismaz viena vesela sakne $x = -1$.